
3 3433 06633916 3

ELEMENTOS



DE

TOPOGRAFÍA, DRENAJE Y RIEGOS

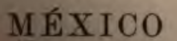
Por el profesor del ramo
en la
ESCUELA NACIONAL DE AGRICULTURA

RAFAEL MALLÉN

Capitán 1º de E. M. E.

Publícase por Acuerdo
DEL SR. MINISTRO DE FOMENTO.





MÉXICO

...E LA SECRETARIA DE FOMENTO

...n Andrés núm. 15.

ELEMENTOS



DE

TOPOGRAFÍA, DRENAJE Y RIEGOS

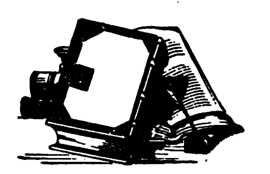
Por el profesor del ramo
en la

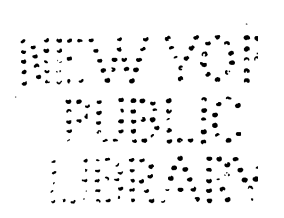
ESCUELA NACIONAL DE AGRICULTURA

RAFAEL MALLÉN

Capitán 1º de E. M. E.

Publícase por Acuerdo
DEL SR. MINISTRO DE FOMENTO.





MÉXICO

OFICINA TIP. DE LA SECRETARIA DE FOMENTO
Calle de San Andrés núm. 15.

1890

Precio del ejemplar............$ 3 00

AL SEÑOR GENERAL

IGNACIO M. ESCUDERO,

EN PRUEBA DE GRATITUD Y RESPETO
DEDICA ESTE TRABAJO

El Autor.

PRÓLOGO.

En las aplicaciones de la ciencia el verdadero saber consiste, más que en el uso ciego y sistemático de vastos conocimientos teóricos, en la apreciación del grado de exactitud que en cada caso se requiere.

F. D. COVARRUBIAS.

Nombrado profesor de Topografía, Drenaje y Riegos de la Escuela Nacional de Agricultura, y dada la ley de instrucción pública que previene á todo profesor propietario escribir los textos de sus clases, me fué preciso formar el presente libro.

Mi plan es bien sencillo: reducir y simplificar las materias hasta donde lo permitan las necesidades del agrónomo. Son tantas hoy las asignaturas de una carrera profesional, que los libros sólo deben ser el guía de clases prácticas y orales, en las que el alumno aprenda objetivamente las principales teorías y los más importantes detalles del curso que estudia, salvo el que se quieran textos que por su extensión más sean obras de consulta, tal vez impropias en manos de un estudiante; pues explicándole hasta el más pequeño fenómeno, sólo ejercitan la memoria, dejando en el más lamenta-

ble reposo á la imaginación, siendo así que ella es la fuente de todo progreso.

Respecto á novedades, pocas pueden esperarse en Topografía, que no sean en los instrumentos, y siendo éstos tantos y á pesar de ello basados todos en unos cuantos principios geométricos, y en fin, habiéndome enseñado mi propia experiencia de estudiante y profesor que es perdida toda explicación sobre ellos, que no sea objetiva, sólo doy los principios geométricos en que se fundan, y en general las correcciones que en virtud de ellos se derivan. Esta es, pues, materia que se enseñará ante los mismos instrumentos, aplicándoles los principios del texto según lo permitan en cada caso sus diferentes mecanismos. Sin embargo de lo anterior, en cuanto á teorías y fórmulas, algunas nuevas propongo. Por ejemplo: para encontrar el límite lineal de las operaciones topográficas, no busco la diferencia entre la tangente y el arco, sino entre éste y su cuerda, por parecerme lo más lógico según las razones que pueden verse en la página 23; no creo que basta este límite, y doy por ello también el angular; establezco una ley sobre la elección de la longitud de la unidad de medida en las bases, y asigno el error lógico admisible en éstas, en función del límite inferior de la percepción lineal, con la angular admitida generalmente de 90″, página 32; al tratar de los niveles doy una teoría más lógica sobre sus errores, página 59; para la eliminación de los errores angulares entre los tres ángulos de un triángulo, propongo un método basado en una nueva teoría que, aunque no exenta del todo de arbitrariedad, me parece, sin embargo, menos arbitraria que cualquiera de las actuales, página 73; para buscar la relación entre la extensión de un terreno, el número de triángulos que debe cubrirlo y los errores lineales y angulares, una vez demostrado el teorema de que el triángulo equilátero es en Topografía el más propio, lo acepto desde luego pa-

ra resolver el problema, página 85; al dar la aplicación de la brújula llevo en cuenta sus errores todos, página 126; desecho la fórmula de Simpson para buscar la superficie limitada por un lindero sinuoso, por creer ilusoria la extrema exactitud que se le supone, según lo demostraré, y reemplazable, con éxito, por otra más sencilla que asiento en la página 169; y en fin, así, sobre cada materia, presento todo lo que creo útil, para que los demás elijan ó desechen lo que les parezca. Por lo demás, es fácil que algunos puntos tratados por mí como originales se hallen en algún otro autor, puesto que la verdad está al alcance de todos los que siguen su camino. Si así fuere, demostrándose por las fechas de las ediciones, acepto la rectificación debida que se me haga.

El ahinco en buscar la influencia de los errores de observación, y que en las medidas angulares me ha revelado una ley de la mayor importancia, págs. 73 á 80, se debe á la convicción que abrigo de que en ello estriba acabar con el divorcio existente entre teóricos y prácticos, pues siendo la teoría el memorando de la práctica, tal antagonismo debe concluir cuando sepamos analíticamente el grado de exactitud que en cada caso debemos emplear, no sólo en atención á los errores, sino á lo que es aún más importante, á su influencia en cada caso. Por otra parte, si la práctica consistiera en "haber hecho," son tantas las aplicaciones de la ciencia, que el más perito se hallaría frecuentemente con trabajos nuevos para él y en los cuales sería bisoño. Esto sería un absurdo. En efecto, triste cosa fuera estudiar año tras año, para encontrarse con que nada es posible hacer bien sin echarlo á perder antes, cual si se tratara de un problema difícil y "absolutamente desconocido." ¿Cuál sería entonces el provecho de los libros, es decir, de los relatos de aquellos que antes de nosotros resolvieron cuestiones semejantes y aun iguales, con éxito completo, empleando los métodos que nos legaron? Ninguno, sino sólo para quien no lo sepa aprovechar.

Sin embargo, lo anterior no significa mi creencia de que cualquiera que haya leído un libro esté en aptitud completa para hacer sus aplicaciones inmediatas, pero sí me atrevo á afirmar que si, con los conocimientos previos necesarios, esa lectura ha sido atenta, pocos ensayos bastarán para familiarizarse con el ramo científico estudiado, y poseerlo teórica y prácticamente, en sus principales aplicaciones.

Como introducción general á mi libro, doy una teoría sobre los errores, por creer que tales estudios son un complemento muy útil á toda ciencia, pues ellos permiten aplicar con acierto los conocimientos adquiridos; y si hay un curso en que esa teoría pueda tener constante aplicación, es sin disputa, en nuestra escuela, en el de Topografía, por lo que me parece que su lugar más propio es en él, para que el alumno comprenda fácilmente el por qué de tanta aproximación como se acepta en Topografía, en donde son raras las cuestiones tratadas con exactitud matemática, sin embargo de que es una de las ciencias de más aplicación.

Algunas teorías pueden parecer contrarias á los principios actuales, como la que se refiere al cálculo de las presas empleando el principio de Pascal, página 215, pero yo espero que á poco que se reflexione se aceptarán como buenas. Sobre esto, como sobre todo, no me ha guiado el espíritu de novedad, sino el deseo de la simplificación, pues en ello está el porvenir de la ciencia.

Convengo en que mi libro es muy elemental; pero yo creo que así deben de ser los textos, y que ya á fin de año, cuando el alumno se haya formado una idea cabal del curso, se vean en clase, bajo la dirección del profesor, algunos puntos tratados con más extensión, en obras de consulta, y se hagan varias aplicaciones prácticas. Esto es, dar lo indispensable; y enseñar á buscar lo necesario, pues todo el mundo sabe que nadie se lanza á un trabajo sin consultar sus autores, por lo

que más que la memoria, debemos desarrollar el buen juicio para consultarlos y aplicar sus principios.

Este es, en mi concepto, el mejor medio de no gastar la inteligencia del estudiante, con mengua del vigor que posteriormente necesita en las aplicaciones reales de su carrera.

Antes de concluir, perdóneseme que insista en una observación sobre la necesidad de textos breves, y mucha práctica, y es que dan derecho á ser más severos en los exámenes, en donde, como en los tribunales, la verdadera bondad está en la justicia al calificar, y la verdad es que con textos extensos y años de muchas asignaturas, se siente uno fuertemente inclinado á la indulgencia, lo cual tiene fatales consecuencias, pues si bien para la grandeza de los pueblos no son necesarios los sabios sino "muchos hombres instruidos," en cambio es indispensable que éstos lo sean verdaderamente.

Finalmente, si este libro llena ó no su objeto, es cosa que resolverá la autoridad competente, á la cual suplico que en caso adverso, disculpe mi ineptitud en gracia de mis buenos deseos de contribuir al progreso del plantel á que tengo la honra de pertenecer.

INTRODUCCIÓN GENERAL.

ESTUDIO DE LOS ERRORES.

1. Las nociones geométricas de volumen, superficie, línea y punto, nos llevan á la convicción íntima de que jamás el hombre podrá medir las dimensiones con absoluta exactitud matemática, pues el punto puede considerarse como el límite de toda extensión, y la magnitud del punto, si la tiene, nos es desconocida.

Resulta pues que la exactitud de nuestras medidas sólo es relativa, y que la relación de esa exactitud debe darla la aproximación á que nos baste llegar en cada problema que pretendamos resolver.

Esta ley fatal á que la naturaleza nos sujete no debe desalentarnos, porque en consonancia nos ha hecho imperfectos, para que la verdad absoluta no sea una necesidad para nosotros. En efecto, los marinos, los ferrocarrileros, los astrónomos, y todos en fin, empleamos el tiempo para regularizar nuestras acciones; pero desde el astrónomo que lo guarda en instrumentos preciosos con uno ó dos décimos de segundo, hasta el gañán que lo pide á su tosca apreciación por las apariencias que lo rodean, cada uno lo valúa con la "exactitud necesaria á sus condiciones."

Es pues indispensable distinguir entre la exactitud posible y la exactitud necesaria, y fijarse en que es la última la útil en las aplicaciones de la vida.

2. Antes de entrar en cálculos, daremos un ejemplo como preparación.

Si á la simple vista miden varias personas una distancia con la mayor exactitud que puedan, siempre se encuentran en sus resultados discordancias en los diezmilímetros, siendo de $0,^{m.}0002$ las fluctuaciones. Esto demuestra pues que si la verdadera longitud es a, el error posible á la vista natural es $\pm 0,^{m.}0001$, puesto que equivocándose unos en más y otros en menos, la magnitud dentro que oscilan es de $0,^{m.}0002$.

3. Sentado lo anterior, nótese ahora cuán natural es dar tanta más fe á un fenómeno cuantos más testigos lo confirman y más de acuerdo están en sus narraciones. Pues bien, siguiendo esta lógica indicación, claro es que el medio de confirmarnos en que una magnitud está bien medida, es el de repetirla, y que mientras más concordantes sean los resultados, más ciertos estaremos que de entre ellos podremos sacar el verdadero. Aquí nos referimos á la verdad práctica, lo que siempre que hablemos de verdad debe entenderse.

Por lo anterior vemos que si de un valor tomamos varias medidas a, a', a''........., podremos separarlas en dos partes: una constante, x, y otra variable e, el error.

Así es que podemos poner,

$$
\begin{aligned}
a &= x + e \\
a' &= x + e' \\
a'' &= x + e'' \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_n &= x + e_n
\end{aligned}
$$

Sumando ahora todas estas ecuaciones y despejando á x, resulta,

$$x = \frac{a + a' + a'' + \dots\dots\dots - (e + c' + e'' + \dots\dots\dots)}{n},$$

ó bien,

$$x=\frac{1}{n}(a+a'+a''+\text{.........})-\frac{1}{n}(e+e'+e''+\text{.........}).$$

Ahora bien,

$$e+e'+e''+\text{.........}$$

es la suma algebraica de los errores, y hay que observar: que estos son muy pequeños con relación á la magnitud medida; que puesto que tanto nos podemos equivocar en más como en menos, muy próximamente habrá el mismo número de positivos que de negativos; que siendo muy pequeñas sus diferencias, serán aun más pequeñas; y en fin, que aun sobrando algunas que no se reduzcan á diferencias, el residuo total siempre puede hacerse, aumentando á n, tan pequeño como se quiera.

A pesar de esto, supongamos el peor caso, esto es, que todos los errores sean iguales en magnitud y signo, é iguales al mayor error que se tolere, al e. Se tendrá,

$$x=\frac{1}{n}(a+a'+a''+\text{.........})\pm e\text{.........} l.$$

Vemos pues que si al formar una serie de valores para medir una magnitud, desechamos aquellos cuyas discordancias sean mayores que el error aceptable e, calculado á priori, el promedio aritmético de los restantes tendrá, cuando menos, la exactitud necesaria, $\pm e$.

Sin embargo, es necesario tener en cuenta dos observaciones: 1ª, que el número de resultados discordantes m' desechado sea menor que la mitad $\frac{1}{2}n$ de los resultados obtenidos, pues si las concordantes m abogan por un resultado dado, los discordantes lo niegan. Es pues lógico admitir que según que se tenga $m >=< m'$, así habrá certeza, duda ó negación en el resultado. 2º Que para desechar valores como discordantes es necesario fijar á e de un modo lógico.

Mas calculada según cada caso, como se darán frecuentes ejemplos en el curso de este libro, la exactitud necesaria e, que será la discordancia admitida, puede suceder que sea apreciable al efectuar la medida, ó no lo sea; después, fácil es admitir, que si es e' la exactitud posible de apreciar y se tiene $e'>e$, será tan difícil hallar la concordancia superior e, que en muchos casos el número de resultados concordantes m será menor que $\frac{1}{2}n$ por más que se repita la medida. Lo más lógico para salvar esta dificultad, nos parece que será admitir la discordancia e', pero entonces exigir en compensacion que el número m sea mayor que m', tantas veces como e' lo sea sobre e. En tal caso sólo llegaremos á la exactitud cuando se tenga $\frac{m}{m'}>\frac{e'}{e}$.

Respecto á los resultados notablemente discordantes, deben desecharse del todo, pues, como en la vida real, las noticias exageradas no deben admitirse, puesto que indican un extravío.

4. Siempre busca la inteligencia medirlo todo, y representar por números aun los errores. Así es como en el cálculo de probabilidades se admite que si m es el número que representa las probabilidades de que un fenómeno se verifique, y m' el de que no se verifique, se tendrá:

Probabilidad de que se verifique, ó positiva, p, por ejemplo,

$$p=\frac{m}{m+m'};\ldots\ldots\ldots 2$$

Probabilidad de que no se verifique, ó negativa, n,

$$n=\frac{m'}{m+m'}\ldots\ldots\ldots 3$$

Tomadas así estas probabilidades, el cálculo toma su suma por la certeza, y obtiene,

$$\frac{m}{m+m'}+\frac{m'}{m+m'}=\frac{m+m'}{m+m'}=1\ldots\ldots\ldots 4$$

Ahora bien, nosotros no estamos del todo conformes con estas notaciones, pues si recibimos noticias contradictorias sobre un acontecimiento, no buscamos su suma para darle fe, sino al contrario, su diferencia. Por ejemplo, tres individuos afirman lo que dos niegan; pues nosotros no creemos como $3+2=5$, sino como $3-2=1$.

Según esto, aceptamos las expresiones de las probabilidades, positiva y negativa, pero para la certeza c tomamos su diferencia, esto es,

$$c=\frac{m}{m+m'}-\frac{m'}{m+m'}=\frac{m-m'}{m+m'}\ldots\ldots\ldots 5$$

Creemos fácil admitir nuestra expresion de la certeza, si se reflexiona que, en la imposibilidad de conocer la absoluta, desde luego que se nos presentan los testigos contrarios m y m' y no podemos eliminar á m', no habrá certeza sino relativamente, esto es, la certeza variará según varíen m y m'.

En cuanto al valor de c dado por la fórmula 5, se ve que adquiere su máximo en una serie dada cuando se tenga $m'=o$, en cuyo caso resulta $c=1$. Ciertamente que á igual resultado conduce la fórmula 4, pero esta coincidencia no aduce nada en su favor, pues de ella y la nuestra debe aceptarse la más lógica.

Finalmente, hemos demostrado que la verdad absoluta, cuyo carácter distintivo es la invariabilidad, carácter también de la certeza dada por la ecuación 4, está fuera de nuestro alcance, por lo que aquella ecuación es inadmisible; y que al contrario, la certeza necesaria y posible es la relativa, cuyo carácter distintivo es la variabilidad; y cuya variabilidad tiene la certeza dada por la ecuación 5, que en consecuencia nos parece superior á la 4.

5. Resumiendo, hé aquí la teoría que proponemos para combatir los errores.

Asignada la exactitud e necesaria á un dato, véase si es posible tomarlo con ella. Si así fuere, repítase la medida hasta que en el número n de resultados haya, "cuando menos,"

$\frac{1}{2}n+1=m$ de valores concordantes, dentro de e, cuyo promedio será el valor buscado. Pero si no fuere posible obtener la concordancia asignada e, sino la e', entonces repítase la medida del valor buscado hasta que haya lo menos, tantos resultados concordantes m sobre los discordantes m', como e' sea mayor que e, esto es, hasta que se tenga,

$$\frac{m}{m'}=\frac{e'}{e}+1, \dots\dots\dots 6$$

tomando en tal caso para el dato en cuestión el promedio de los resultados concordantes.

Hecho lo anterior, la certeza del valor será,

$$c=\frac{m-m'}{m+m'};$$

y su error probable, $\pm$ e.

Por lo demás, dicho queda que las condiciones,

$$m=\frac{1}{2}n+1, \text{ y } \frac{m}{m'}=\frac{e'}{e}+1,$$

corresponden al mínimo de certeza en cada caso, y que ésta aumentará, como es natural, con el número de observaciones, alcanzando su máximo cuando resulte, según se ha dicho,

$$\frac{m-m'}{m+m'}=1 \dots\dots\dots 7$$

6. Establecida la teoría anterior, fácil es prever que puede presentarse el caso de tener que elegir entre dos valores ó más, de un dato, determinado por individuos, ó en condiciones diferentes. En tal caso, hay que atender no sólo á las certezas, sino también á los errores tolerados en cada caso, pues mientras más amplios sean éstos, más fácil será tomar el dato buscado, y resultará una certeza mayor, dentro de $\pm$ e.

Ahora bien, mientras mayor sea la certeza y menor el error, más el dato se acercará á la "certeza absoluta;" y claro es que esa aproximación a, á la certeza absoluta, tendrá por valor, según los raciocinios anteriores,

$$a=\frac{c}{e}\text{.........}8$$

Como se notará esta "aproximación á la certeza absoluta," que por abreviar llamaremos "bondad," del dato, no sólo servirá para comparar varios resultados, sino que es la última y más perfecta indicación del grado de verdad alcanzado.

7. Como ampliación del método, daremos un ejemplo práctico.

Queriendo calcular el valor angular v de las divisiones de un nivel, hicimos una serie de 18 observaciones, pues queríamos á v con 2,″5 de exactitud, y nos pareció "á priori" necesario aquel número de observaciones, que resultó suficiente, con sobra, como luego veremos.

Calculado el valor de las divisiones con los datos recogidos, resultaron los valores siguientes, que presentamos ya ordenados por sus valores crecientes,

v=30,″2
32, 1
33, 7
33, 8
34, 0
34, 8
35, 0
35, 1
35, 9
35, 9
36, 5
37, 2
37, 2

v=37, 3
37, 7
38, 7
39, 1
42, 9.

Como se ve, el primero y último de estos valores se apartan tan irregularmente de los demás, que nace luego la idea de desecharlos como exagerados, pues se observa la ley general de que estos valores no discrepen, uno del siguiente, ni 1″. Después, combinando el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo, y así sucesivamente, se ve que el 6º, ó 34,″8, y el 14º, ó 37,″3, ya no discrepan sino en 2,″5, y vienen á determinar en consecuencia la parte concordante de la serie, cuya parte, del 34,″8 al 37,″3 inclusive, da el promedio 36,″1.

Respecto al error probable será ± 2,″5.

La certeza, puesto que sólo aceptamos 16 resultados de los 18, y se tiene m=9 y m'=7, tendrá por valor,

$$c=\frac{9-7}{16}=0{,}125.$$

Y en fin, la "bondad" será,

$$b=\frac{c}{e}=\frac{0{,}125}{2{,}5}=0{,}05.$$

Ambos valores c y b, indican que el resultado merece poca fe, pues c se alejó mucho de 1, y b es muy pequeño. Y en efecto, observaciones posteriores descubrieron un error en los cálculos, al revisarlos.

Ahora es tiempo de ver más claro la relación que existe entre e, c y b.

Supongamos que se hubiera querido el valor anterior con 10″ de exactitud solamente.

Entonces sólo eran despreciables el primero y último valor, y se tendría,

$v=37,''7$
$e=\pm 10.$
$c=16.$
$b=1,6.$

Antes vimos que mientras más amplio era el límite de la discordancia e aceptada, más fácil era el problema; así pues, es más cierto que v vale $37,''7\pm 10$ que $36,''1\pm 2,''5$; por lo que es natural que c y b sean mayores con $e=10$ que con $e=2,5$.

También será fácil comprender ahora: 1º, que para que varios valores de un dato sean comparables, es necesario que en ellos e sea igual; y 2º, que de las indicaciones e, c y b, la más importante es siempre e.

8. Como complemento de estos estudios, creemos útil manifestar que no siempre un dato está aislado para medirse, como al buscarse la distancia entre dos puntos; ni tampoco entra continuamente una sola variable, para calcular una función, como en el valor angular de las divisiones del nivel, cuya fórmula es,

$$v=\frac{2\,x}{o-e};$$

sino que es frecuente tener una variable en función de otras varias.

Si pues en general se tiene

$$y=f\,(x,\ z.........),$$

los errores cometidos en x, z........., tendrán influencias diferentes en y. Así es que si se quiere que el error en y no pase de ciertos límites, es necesario buscar los que para ello deben tener x, z.........

Para lograrlo nada es más á propósito que el cálculo diferencial, considerando á los incrementos como los errores.

Entonces se tendrá,

$$dx = \frac{dy}{f(x, z........)};$$

$$dx = \frac{dy}{f'(x, z........)}$$

y así sucesivamente; valores todos calculables á priori con el error asignado *dy;* y que indicarán el cuidado con que se deben tomar á x, z........., y aun hasta en qué límites de sus magnitudes será prudente emplearlos, pues un mismo error puede tener influencias diferentes según la magnitud del elemento á que pertenece, como lo indican las fórmulas anteriores, y se verá en el curso de la obra.

Es, según esto, necesario ver no sólo el error que un dato pueda tener, sino su influencia en vista de la forma de la fórmula en que entra y la magnitud del elemento que lo contenga.

9. Para concluir el estudio de los errores, creemos útil insistir, concretando más, en que hay una relación íntima entre la magnitud de un elemento, aquellos en función de los cuales está, y sus errores, cuya relación en su parte úlil puede enunciarse diciendo que, "cuando un elemento pequeño está en función de datos grandes, la influencia de los errores de los datos es pequeña en el resultado." Por lo demás, la inversa es igualmente cierta, esto es, cuando se busca un gran valor en función de datos pequeños, la influencia de los errores es enorme.

En efecto, si un elemento pequeño está en función de otro grande, su relación más general puede representarse por la fórmula,

$$y = \frac{1}{x}, \text{.........} 9$$

siendo la unidad el tipo de magnitud.

Acudiendo pues al cálculo considerando á los incrementos como errores, se tiene, diferenciando,

$$dy = -\frac{dx}{x^2}; \text{........} 10$$

y como dx siempre será mucho menor que la unidad, y x al contrario mucho mayor, resulta que $\frac{dx}{x^2}$ será pequeñísimo. Respecto á la inversa, se demuestra despejando á dx de la ecuación anterior para obtener,

$$dx = -x^2 \, dy; \dots\dots\dots 11$$

por cuya ecuación se ve que aun siendo pequeño dy, el gran valor de x^2 hará que dx sea grande.

Estas consideraciones recomiendan pues, que al buscar una magnitud cualquiera, pequeña ó grande, se ponga en lo posible en función de elementos grandes.

Por ejemplo, al haber de buscar el valor angular de las divisiones del nivel de que nos ocupamos en el párrafo 7, se procuró que la burbuja recorriera muchas divisiones, para que tanto x como $(o-e)$ fueran grandes. Así, pues, ya que un problema tenga varias soluciones, representadas por fórmulas diferentes, ó que teniendo una sola puedan los datos cambiarse á voluntad, como en el ejemplo del nivel, se deberá en todos casos optar por aquel camino en que los datos sean mayores, pues al medirlos habrá menos causas de error.

10. Diremos ahora que los errores se dividen en sistemáticos, instrumentales, de observación y de cálculo.

I. Sistemáticos. Son aquellos que dependen de una falsa teoría, aceptada por ignorancia ó por conveniencia.

Por ejemplo, los triángulos topográficos se suponen planos conscientemente, porque la exactitud de calcularlos como esféricos no compensaría los gastos para lograrlo. En este ejemplo, á iguales lados, siempre el triángulo plano tendrá una superficie menor que la del esférico, sin que sea posible llegar á la de éste mientras se usen las fórmulas del triángulo plano. Los errores sistemáticos son pues indestructibles, á no ser con los progresos de la ciencia.

II. Instrumentales. Bastante se verá en Topografía cómo pueden eliminarse ó llevarse en cuenta. Parece, según esto,

que la destrucción de los errores de un instrumento depende de la habilidad de quien lo maneje; mas esto sólo es real dentro de ciertos límites, pues un instrumento incompleto y mal cuidado, en las mejores manos será malo. Sin embargo, alguien muy práctico y hábil podrá emplearlo con éxito, pero tal excepción no debe formar regla general para exigir á nadie igual pericia.

III. De observacion. Ya se verá en Topogratía cómo hasta el estado fisiológico del observador hace cambiar sus apreciaciones. La única manera de combatir estos errores es pues la repetición de las medidas en condiciones diversas; y

IV. De cálculo. Este es el menos peligroso, pues siempre es posible eliminarlo con la revisión de los cálculos.

Ahora se comprenderá mejor la imposibilidad de una medida absoluta, pues á pesar de que el error es función de mil elementos, sólo se nos manifiesta por un fenómeno; la discordancia en los resultados.

11. Siendo universalmente aceptado el método de los mínimos cuadrados, parece una temeridad nuestra rechazarlo; por lo cual nos es necesario defendernos.

Según hemos dicho en el párrafo 5, la expresión de la certeza en el cálculo de las probabilidades es, 1; pero bajo la hipótesis de tenerse, como ya lo explicamos,

$$\frac{m}{m+m'}+\frac{m'}{m+m'}=\frac{m+m'}{m+m'}=1.$$

Ahora bien, creemos haber refutado en el mismo párrafo 5 esta convención, y demostrado con éxito que debe tomarse

$$\frac{m-m'}{m+m'},$$

para la probabilidad; que se cambiará en certeza cuando se tenga $m'=o$, y en consecuencia,

$$\frac{m-m'}{m+m'}=1.$$

Mas no sólo disentimos en esto, sino en otras cosas que vamos á ver.

Liagre, en la pág. 266, continuando, dice:

"Puesto que la probabilidad de un error x varía con este error, la función analítica que lo represente será fx.

"La probabilidad de que el error esté comprendido entre x y $x+dx$, será pues $f'(x+dx)-fx=f'x\,dx$.

"Siguiendo la convención de representar la certeza por la unidad, é integrando entre los límites de x que serán $\pm\,a$, "a siendo *pequeña*," se tiene,

$$\int_{-a}^{+a} f'(x)\,dx=1 \ldots\ldots\ldots 12$$

"Ahora, siendo x desconocido, y disminuyendo $f'(x)$ muy rápidamente cuando x aumenta, se puede escribir en general,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,dx=1,$$

y así continúa."

Pues bien, según las nociones filosóficas del cálculo infinitesimal, salvo nuestra ignorancia, los límites de una integral son los valores á los cuales la variable puede llegar.

Según esto, que á la integral

$$\int f(x)\,dx,$$

se le dé por límites $\pm\,a$, lo aceptamos con la condición de que a sea pequeño, pues en efecto los errores siempre son una pequeña fracción de las magnitudes; pero ya aceptado ese límite con razones tan poderosas, es contradictorio admitir lo diametralmente opuesto á su pequeñez, esto es, el ∞; pues ni que x sea desconocido es una razón, ni que la probabilidad disminuye cuando el error aumenta lo es; y nótese que, rigurosamente hablando, disminuye la probabilidad al

aumentar x, y así, lejos de llegar á la certeza se iría á la negación. Esto es al menos lo que nosotros comprendemos.

La fórmula aceptable sería, pues, en nuestra opinión,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = \frac{m-m'}{m+m'} \ldots\ldots\ldots 13.$$

Confesamos que nuestra inteligencia no comprende cómo puede pasarse de $\pm\, a$ á $\pm\, \infty$, pues si bien concibe que no sólo esa integral sino cualquier valor está dentro de $\pm\, \infty$, de esto á que esos sean sus límites ve una distancia enorme.

No obstante lo anterior, puede alegarse que las indicaciones del cálculo de probabilidades se ven con frecuencia realizados por la práctica. Esto tiene varias razones de ser, de las cuales rápidamente daremos las principales.

I. Al medir la magnitud todo tiende á confundirse cerca de los límites. Por ejemplo, en las líneas trigonométricas, cerca del cero, se confunden el seno, el arco y la tangente. Si pues se tiene,

$$sen\ \alpha = \frac{a}{b}; \ldots\ldots\ldots 15$$

b, siendo una hipotenusa, ó

$$tang\ \alpha = \frac{a}{b}; \ldots\ldots\ldots 16$$

b, siendo un cateto; dentro de ciertos límites el resultado es igualmente exacto, para un valor de α muy pequeño, tomando en cualquiera de las fórmulas,

$$\alpha = \frac{a}{b\ sen\ 1''}$$

$$\alpha = \frac{a}{b\ tang\ 1''}.$$

Cualquiera puede ver, en efecto, en las tablas de Callet, que los logaritmos del seno y la tangente son iguales hasta

1'36'', naturalmente en logaritmos de siete cifras. Si pues se bajare á sólo los primeros segundos, la confusión avanzaría á más cifras, hasta el límite inferior cero, en que serán absolutamente iguales, puesto que ambos desaparecerían.

Nótese, pues, cómo líneas con leyes tan diferentes como son el seno y la tangente, pueden dar en ciertos casos resultados idénticos; cerca del límite inferior de la magnitud en que todo se confunde.

Fácil es, según esto, comprender que, tratándose de valuar elementos insignificantes con métodos desigualmente exactos, puede llegarse á iguales resultados. En último caso, habrá pues justicia en aceptar lo más sencillo.

II. Otra razón en contra de la teoría que combatimos es, que se alega entre otros casos que ciertos fenómenos obedecen á la fórmula que representa al método. Pues bien, en primer lugar, hay en los defensores del cálculo cierta elasticidad para construir las curvas de la ecuación; y luego, teniéndose una función con varias variables, aunque laborioso, fácil es llegar á cualquiera curva introduciendo ó variando uno ó más coeficientes. Así, pues, esta tampoco es una prueba, en nuestra opinión.

III. Finalmente, el cálculo infinitesimal mismo en que se apoya el de probabilidades, no es sino aproximado, y así, no puede afirmarse que pueda dar indicaciones rigurosamente exactas.

Entremos en este nuevo y último caos con ejemplos prácticos, que tal vez den alguna luz.

La diferencial de *sen* x, es *cos* $x\, dx$.

Pues bien, dése á dx la interpretación que se quiera, pero pongamos *sen* $(x+dx)$ y desarrollemos; se tendrá,

$$\operatorname{sen}(x+dx)=\operatorname{sen} x \cos dx+\cos x \operatorname{sen} dx;$$

por lo cual,

$$\operatorname{sen}(x+dx)-\operatorname{sen} x \cos dx=\cos x \operatorname{sen} dx.$$

Llegados á este punto, notemos que si se supone á dx bastante pequeño para poder tomar $\cos dx=1$ y $\operatorname{sen} dx=dx$, resulta,

$$\operatorname{sen}(x+dx)-\operatorname{sen} x=\cos x\, dx,$$

ó haciendo $y=\operatorname{sen} x$; $\operatorname{sen}(x+dx)=y'$; y en fin, $y'-y=dy=d.\ \operatorname{sen}.\ x$,

$$d \operatorname{sen} x=\cos x\, dx.$$

Así en cada caso, por la simple álgebra siempre será posible hallar una derivada.

Otro ejemplo:

$$y=ax^3$$

se tendrá,

$$y+dy=a\,(x+dx)^3=ax^3+3\,ax^2\,dx+3\,ax\,dx^2+a\,dx^3,$$

por lo que restando lo anterior, se tiene

$$dy=3\,ax^2\,dx+3\,ax\,dx^2+adx^3 \ldots\ldots\ldots 17.$$

Esto es lo riguroso; sin embargo, la derivada por la regla del cálculo es

$$dy=3\,ax^2\,dx \ldots\ldots\ldots 18.$$

Para hacerlos concordar, es pues necesario suponer á dx bastante pequeño para que $3\,ax\,dx^2$ y $a\,dx^3$ sean mucho más pequeños aún y despreciables sus valores en la ecuación 17.

Por lo demás, consúltese en cálculo y se verá que, sea cual fuere la filosofía del autor, llega á conclusiones de esta forma:

$$y=x^n$$

y con el incremento h,

$$y'=(x+h)^n=x^n+n\,x^{n-1}h+\frac{n\,(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 \ldots\ldots\ldots$$

y restándolas, y dividiendo por h,

$$y'-y=n\ x^{n-1}+\frac{n\ (n-1)}{2}x^{n-2}h+\ldots\ldots\ldots$$

y entonces "nos dicen," y pasando al límite, con $h=o$,

$$\frac{dy}{dx}=n\ x^{n-1}.$$

Este es paso que nunca hemos podido comprender, "sino como una operación aproximada," pero jamás como exacta, pues si $h=o$ resulta $y'-y=dy=o$ y $h=dx=o$; es decir, en el cero, llámesele límite ó como se quiera, no hay magnitud. Así, pues, en realidad, en ese límite no queda

$$\frac{dy}{dx}=n\ x^{n-1}$$

sino

$$\frac{o}{o}=n\ x^{n-1}.$$

Mayor absurdo notamos todavía cuando se nos presenta á $\frac{dy}{dx}$ como una tangente. En efecto, sea la ecuación,

$$V=\frac{1}{6}\pi\ d^3,$$

que representa el volumen de una esfera. Diferenciando resulta,

$$\frac{d\ V}{d.d}=\frac{3\ \pi}{6}d^2$$

y comprendemos que $\pi\ d^2$ sea una superficie, pero no una tangente.

Bastan estas consideraciones para comprender cuán vago es todo esto, y así, concluimos pidiendo la indulgencia de los sabios, si estamos equivocados.

LIBRO PRIMERO.

TOPOGRAFÍA.

INTRODUCCIÓN Á LA TOPOGRAFÍA.

Exposición de la Topografía.—Límites de las operaciones topográficas.—Reconocimiento preliminar de los terrenos y elección de vértices.—Divisiones de la Topografía.—Observaciones.

I. Exposición de la Topografía.

12.—La Topografía es el ramo de la ciencia que se ocupa de la representación geométrica de una pequeña superficie terrestre, para lo cual se vale de las figuras geométricas y especialmente del triángulo, por ser la más elemental de todas y la de más fácil aplicación.

Para dar una idea general de la Topografía, supongamos que se trate de levantar el plano de la pequeña hacienda cuya perspectiva damos en la fig. A, lám. 1.

Primero se eligen los puntos más notables del terreno, tales como A, B, C, D,..............., que se llaman vértices ó estaciones, debiendo tener tal posición que unidos dos á dos se forme una red de triángulos poco más ó menos equiláteros, pues como á su tiempo veremos, es en ellos la forma más propia para los trabajos topográficos; después, se elige uno de los lados de estos triángulos, que esté sobre un terreno sensiblemente horizontal, para medirlo con una cinta ó cadena dividida en metros, siendo á esta línea medida directamente

á lo que se llama la base de la red, y con la que, y los ángulos de los triángulos, que se miden con un goniómetro, que es todo instrumento para valuar ángulos, se calculan todos los lados de los triángulos de la red, y cuyos lados resultan en proyección horizontal como á su tiempo veremos; además, al ir formando los triángulos, de cuyos vértices se lleva un croquis, aproximado solamente, puesto que se hace á vista, y de cuyos ángulos se forma un registro, se van fijando los detalles más notables del terreno, tales como f, b, c, d,........., fig. B, lám. 1, que se refieren á los lados de los triángulos que les sirven de apoyo, por medio de las distancias Ff, F'b, F'c,............, y de los ángulos α, β, γ,............; y en fin, se van tomando también las alturas relativas de los puntos A, B, C,............, á cuya operación se llama nivelación.

Tomados todos los datos del terreno, para trazar el plano, se elige ante todo una unidad de representación, por ejemplo, 1000 metros se representan por 1, cuya relación á que se llama escala se escribe así, $\frac{1}{1000}$, ó de este otro modo 1:1000, leyéndose según las reglas de la Aritmética, esto es, 1 es á 1000; en seguida, calculados los triángulos, se traza en el plano y á su escala, la red A', B', C', D',........., fig. B, lám. 1; luego se da en la red su situación á los puntos f, b, c, d,........., por las distancias Ff, F'b, F'c,............, y los ángulos α, β, γ,............; y después, pasados ya al papel todos los detalles del terreno, se borran las líneas auxiliares, se indica la dirección de la meridiana con una flecha dirigida al Norte, á cuya operación se llama orientar el plano, y se le pone á éste su escala para poder valuar las distancias gráficamente, con lo cual queda concluído el trabajo, y resulta, en fin, la figura C de la lámina 1.

Como se ve, el procedimiento para levantar un plano no tiene nada de extraordinario para quien sepa Geometría, ni puede ser más sencillo, por más que sus detalles exijan explicaciones más ó menos largas y que poco á poco iremos conociendo.

II. Límites de las operaciones topográficas.

13.—Hechas las explicaciones anteriores, es necesario hacer notar que, siendo la tierra esférica, en todo rigor resulta: 1º, que la base de la red, medida directamente, no es una línea recta, sino un arco de círculo máximo de la tierra; 2º, que convergiendo al centro de la tierra las verticales de los vértices de los triángulos, los ángulos en ellos medidos no pertenecen á triángulos planos sino esféricos, lo cual son en realidad los de la red; y 3º, *que haciéndose en Topografía la proyección del terreno a b c sobre el horizonte H H', tangente en su parte media, fig.* 1, *lám. II, y bajo la hipótesis de ser paralelas todas las verticales del terreno, y teniéndose b c> b' c, hay discordancia entre los datos y los cálculos, pues aquellos pertenecen á la Trigonometría Esférica, y éstos se hacen por la rectilínea; y perteneciendo la superficie del terreno á una esfera, por lo que no es desarrollable, se supone sin embargo plana.*

Se ve, pues, que si bien cerca de *b* tal discordancia puede ser inapreciable, en virtud de la magnitud del radio terrestre con relación á la extensión *a c* del terreno, más allá de ciertos límites debe ser intolerable.

Es pues necesario buscar esos límites, para encerrar dentro de ellos á la Topografía.

Para lograrlo, notemos que el principal objeto de los levantamientos topográficos, por lo general es el de conocer la superficie en que se hacen, y que siendo ésta igual á la suma de las de los triángulos de la red, no importa que estos se hallen en planos diferentes, pero sí que en cada triángulo, el error de suponerlo plano sea menor que aquel á que dan lugar las aproximaciones instrumentales y de observación. Ahora bien, según lo demostraremos, en los trabajos más delicados de Topografía, se admite en la base un error de 0,0001 de su longitud, y en los ángulos, una aproximación de 1″, tal como se hizo en la carta del Distrito Federal. Busquemos pues cuál debe ser el valor del ángulo *c* fig. 1, para que

la diferencia entre el arco *a b c* y su cuerda *a c* sea igual á 0,0001 del arco; y luego, cuál debe ser el valor de un lado en un triángulo esférico, para que la diferencia de la suma de sus ángulos á 180°, suma de los ángulos de un triángulo plano, sea sólo de 3″, puesto que en cada ángulo se admite 1″ de error.

Para el primer límite, el lineal, llamando *d* á la diferencia entre el arco *a b c* y su cuerda *a c*, puesto que la proyección del terreno es en $a' \, c' = a \, c$; se tiene,

$$d = a\,b\,c - a\,c;$$

ó bien, fig. 1,

$$\frac{d}{2} = \frac{c}{2} - sen\,\tfrac{1}{2}\,c;$$

y como el desarrollo del seno en función del arco es,

$$sen\,\tfrac{1}{2}\,c = \frac{c}{2} - \frac{c^3}{48} + \ldots\ldots\ldots;$$

sustituyendo queda, no apreciando más términos por su pequeñez,

$$\frac{d}{2} = \frac{c^3}{48};$$

ó para todo el arco,

$$d = \frac{1}{24}c^3 \ldots\ldots\ldots 1.$$

Hallada esta fórmula, pongamos pues la condición.......... $d = 0{,}0001\,c$, y tendremos despejando á *c*, y para el radio de la tierra $R = 6366738$ metros,

$$c = R\sqrt{0{,}0024} = 311900^{m.}$$

Vemos, pues, en números redondos, que la diferencia entre un arco de 300 kilómetros y su cuerda, sólo es de 30 metros, que son la diezmilésima parte de 300000, y que en con-

secuencia, el límite lineal de las operaciones topográficas es de 300 kilómetros. Por lo demás, no se crea que á cada triángulo de la red se puede dar semejante magnitud, pues la línea *a b c* se ha supuesto ser un arco de círculo máximo de la tierra que pasa por los puntos *a* y *b* más distantes de un terreno dado. Más claro, si el polígono de la fig. 2, es el perímetro de un terreno, y su máxima longitud es A B, ésta es la que puede ser de 300 kilómetros, para que su cuerda sólo difiera de ella 30 metros, y el terreno pueda ponerse bajo el dominio de la Topografía, por lo que respecta á su límite lineal.

Hallado este límite, busquemos el angular, fig. 3.

Ya hemos dicho que todo triángulo formado sobre la tierra es en rigor esférico, por pequeño que sea, y que en consecuencia y siendo 1″ la mayor aproximación que se da á los ángulos en Topografía, lo que podemos hacer para calcular los triángulos como planos, es no darles una extensión mayor de aquella á la cual se tenga,

$$A+B+C-180^\circ=3'';$$

á cuya diferencia se llama exceso esférico.

Para calcular este exceso hay fórmulas muy sencillas, pero siendo todas aproximadas, y requiriendo conocimientos inútiles al topógrafo, vamos á establecer una, también aproximada, pero basada en el triángulo equilátero, puesto que, como á su tiempo veremos, es la forma que por prescripción debe darse á los triángulos, por supuesto poco más ó menos.

Para ello se sabe por la Trigonometría Esférica, que si se tienen los tres lados a, b y c de un triángulo esférico, y el ángulo A, existe la relación,

$$\cos. a=\cos. b \cos. c+\operatorname{sen}. b \operatorname{sen} c \cos A;$$

suponiendo pues $a=b=c$, y poniendo $\cos. a=1-2 \operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2} a$, y $\cos. A=1-2 \operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2} A$, resulta,

$$sen.^2 \tfrac{1}{2} a = sen.^2 a \; sen.^2 \tfrac{1}{2} A;$$

ó extrayendo la raíz,

$$sen. \tfrac{1}{2} a = sen. a \; sen. \tfrac{1}{2} A;$$

y con la relación, $sen. a = 2 \; sen. \tfrac{1}{2} a \; cos. \tfrac{1}{2} a$,

$$cos. \tfrac{1}{2} a = \frac{1}{sen. \tfrac{1}{2} A} \ldots\ldots\ldots 2$$

Ahora bien, si se tratara de un triángulo plano y equilátero se tendría, suponiendo aplicable esta fórmula á él, $A=60°$; pero siendo esférico y no debiendo exceder sus ángulos sino 3″ de los del plano, ó 1″ para un ángulo, tomaremos $A=60° \; 00' \; 01''$. Calculando pues la fórmula 2 con este valor resulta, en metros ya,

$$a = 37800^{m.},$$

es decir, 40 kilómetros en números redondos, será el máximo del lado de los triángulos para que su exceso esférico no pase de 3″, y así estemos ciertos de que el error debido á ello será menor que el de los instrumentos y observación reunidos, y que en consecuencia los triángulos pueden calcularse como planos, puesto que aun siéndolo en todo rigor, no se podrían medir sus ángulos, con los instrumentos topográficos, con una aproximación mayor que la del exceso esférico admitido.

Reasumiendo, resulta: que los lados de una triangulación, y desde luego la base, no deben pasar de unos 40 kilómetros; y que la línea de mayor longitud de un terreno no debe exceder de 300.

Fuera de estos límites será pues necesario recurrir á la Geodesia, que no es sino la Topografía, ya no despreciando errores pequeños, sino llevándolos en cuenta con el más alto grado de precisión.

III. Reconocimiento preliminar de los terrenos y elección de vértices.

14.—Se ha dicho que la mejor forma de los triángulos para los trabajos topográficos es la equilátera, y siendo esto así, fácil es comprender que antes de proceder á las operaciones de un levantamiento, será muy útil reconocer el terreno á grandes rasgos para elegir los vértices de los futuros triángulos, armonizando su forma y magnitudes con la extensión del terreno, la facilidad de las medidas y la rapidez de los trabajos. En efecto, cuando este reconocimiento, que generalmente se hace á caballo en grandes terrenos, es omitido, sucede con alguna frecuencia que el ingeniero encuentra obstáculos insuperables, como pantanos, bosques, barrancos y otros, que le obligan á rodeos ó á apertura de brechas que le quitan tiempo. Además, no siempre el terreno por levantar se presenta despejado ó á la vista, sino que al contrario, la vegetación y los movimientos del suelo casi siempre le ocultan su inmensa mayoría; y finalmente, aun suponiendo despejado el horizonte, si bien los primeros triángulos pueden elegirse bien conformados desde un solo punto, por estar próximos, ya los más lejanos resultarán defectuosos, pues á grandes distancias unos puntos del terreno se proyectan sobre otros y es imposible formarse una idea, ni siquiera aproximada, de sus distancias y posiciones relativas.

El reconocimiento previo de los terrenos por levantar, es pues indispensable si se quiere proceder con acierto y rapidez; y dicho quedó, que para que sea fructífero, el ingeniero debe ir formando, á medida que lo hace, un croquis, á vista de ellos, y en el que los vértices futuros tengan su lugar, así como los caminos, bosques, pantanos, y en fin, todos aquellos detalles importantes de cuyo conocimiento pueda sacar provecho para trazarse un plan de operaciones seguro y rápido.

Aceptado lo anterior, veamos por qué la forma equilátera es la más propia para los triángulos topográficos.

Si al efecto suponemos que en la fórmula más general para calcular el lado de un triángulo,

$$a = b\frac{sen.\ A}{sen.\ B},$$

todo es variable y la diferenciamos, se obtiene,

$$d\,a = b\left(\frac{sen.\ B\ cos.\ A\ d\ A - sen.\ A\ cos.\ B\ d\ B}{sen.^2 B}\right) + \frac{sen.\ A}{sen.\ B}\ d\ b;$$

ó bien,

$$d\ a = \frac{sen.\ A}{sen.\ B}\ b\ (cot.\ A\ d\ A - cot.\ B\ d\ B) + \frac{sen.\ A}{sen.\ B}\ d\ b,$$

y puesto que $b\ \frac{sen.\ A}{sen.\ B} = a,$

$$d\ a = a\ (cot.\ A\ d\ A - cot.\ B\ d\ B) + \frac{sen.\ A}{sen.\ B}\ d\ b;$$

y entonces vemos, que si consideramos á los incrementos $d\,b$, $d\ A$ y $d\ B$ como á los errores cometidos en las aplicaciones al tomar prácticamente á b, A y B, $d\ a$ será el error resultante en a, á causa de aquellos. Después, como al medir un ángulo el error es independiente de su valor, como es fácil comprender, bien podemos poner $d\ A = d\ B$, y nos quedará, ordenando,

$$d\ a = \frac{sen.\ A}{sen.\ B} d\ b + a\ (cot.\ A - cot.\ B)\ d\ A \ldots\ldots\ldots 3,$$

cuya ecuación nos enseña que $d\ a$ será un mínimo cuando se tenga $A = B$ en signo y magnitud, en cuyo caso resultará,

$$d\ a = d\ b.$$

Ahora, como si tomásemos la fórmula,

$$c=b\frac{sen.\ C}{sen.\ B},$$

hallaríamos que el mínimo de dc correspondía á la condición $C=B$, lógico es deducir que el caso más favorable será cuando se tenga $A=B=C$, con lo cual quedaría demostrado el teorema anunciado.

Dicho lo anterior, nótese que se debe tener también $dA=dB$ en signo y magnitud; en lo que según parece no se ha reflexionado hasta hoy. En efecto, sólo así puede llegarse á la fórmula 3, porque si dA y dB son de signos contrarios, aun numéricamente iguales, no pueden sacarse como factor común.

En tal virtud, no debe sentarse la fórmula 3, sino la siguiente,

$$da=\frac{sen.\ A}{sen.\ B}db+a(\pm dA)\ cot.\ A-a(\pm dB)\ cot.\ B; \ldots\ldots\ldots 3',$$

pues siendo imposible conocer el signo del error, ignoramos la forma final que en cada caso tome la fórmula 3′. Según esto, aun en los triángulos equiláteros se aglomera la influencia de los errores angulares cuando tienen signos contrarios, por lo que la demostración común no es concluyente.

La verdad es, pues, que siendo el error dA, su influencia e es, á la unidad de distancia,

$$e=dA\ cot.\ A;$$

y vemos que e será nulo cuando A sea de 90°; pero como al crecer A, ángulo de un triángulo, los otros dos B y C disminuyen, y la influencia del error será mayor en ellos, resulta que lo mejor es que se tenga $A=B=C$.

Reflexione ahora el alumno que aunque se llega casi á igual resultado por ambas demostraciones, la filosofía de la segunda es a verdadera.

Fácil nos hubiera sido dar sólo la segunda, pero hemos querido dar la vulgar también, para que se vea cuán fácil es

un desliz y cómo la antigüedad y universal aceptación de un raciocinio no son prueba infalible de su certeza.

La figura 4 interpreta la fórmula 3′.

IV. Divisiones de la Topografía.

15.—Según la exposición hecha de la Topografía, al principio de esta introducción, fácil es ver que la dividiremos en las partes siguientes:

Triangulación: en la cual explicaremos la medida de las bases; daremos la teoría general de los goniómetros, y su aplicación á la medida de los ángulos; explicaremos algunos detalles que simplifican el cálculo de los triángulos, y permiten llevar la exactitud al grado que se quiera; enseñaremos á calcular el azimut, ó sea el ángulo que una línea cualquiera forma con la meridiana que la corta; daremos algunas aplicaciones de la Geometría Analítica á la Topografía; y en fin, manifestaremos cuáles son los principales problemas á cuya resolución se prestan las materias anteriores.

Detalles: en los que trataremos de explicar cómo se dan en el plano sus posiciones á los objetos secundarios del terreno y ajenos á su naturaleza, como fincas, labores, obras de arte, y otros por el estilo; para cuyas operaciones se usan principalmente la brújula, que ya conocemos en Física; los telémetros, que son instrumentos para medir distancias sin necesidad de una medida directa sobre el terreno; y en fin, los troquiámetros que tienen el empleo de los telémetros, pero aplicándose directamente sobre el suelo.

Nivelación: en la cual enseñaremos á medir las alturas relativas de los puntos diversos del terrenos, referidas todas á un plano común; dividiendo á esta nivelación en topográfica, para cuando se trate de una gran exactitud; en trigonométrica, para cuando sólo quiera formarse una idea de los movimientos del suelo; y en barométrica, para cuando lo que se busque sea la altura de un punto sobre el nivel invisible del mar; terminando esta parte por las reglas generales con

las cuales, y el concurso de las materias anteriores, se pueda trazar un plano que represente á los accidentes del terreno, en los que incluimos los objetos sobre él situados de un modo estable por su naturaleza, como lomas, cerros, ríos, bahías y otros por el estilo, á cuya representación llamaremos configuración.

Agrimensura: en la que se darán los métodos generales para las medidas analítica y gráfica de las superficies; ciertas reglas para la valuación de las tierras; y otras para su fraccionamiento bajo las condiciones en que éstas se presentan.

V. Observaciones.

16.—Aunque sencillas y breves estas observaciones, les hemos dedicado un párrafo especial, para que viéndolas aisladas se les dé preferente atención, pues se refieren á puntos que teniendo una constante aplicación en el curso es bueno conocer desde ahora para evitar repeticiones monótonas. Estas observaciones son las siguientes:

Dados á conocer los límites máximos de exactitud en cada caso, es necesario saber que bajo ellos esa exactitud puede variar al infinito. En efecto, el plano de un terreno puede pedirse con mil objetos diferentes, según la explotación á que se destine, y claro es que para cada caso bastarán sólo cierta exactitud y elementos de él. Por ejemplo, si sólo se quiere su extensión superficial, los trabajos se limitarán á la red, puesto que son inútiles los detalles; y aun esta red se hará con diversos grados de exactitud según el objeto y valor de las tierras, en virtud de la cual, si en tal caso puede ser indispensable medir los ángulos con 1″ de aproximación, en otro bastarán 5″, 10″, 15″, y hasta uno ó dos minutos, y aun grados; en relación de cuya aproximación se harán los cálculos y el plano, no tomando para los primeros sino logaritmos de cinco cifras y aun menos. Se ve pues que al ocuparnos de las diferentes partes en que hemos dividido la Topografía, debemos tratar las cuestiones llevándolas al límite superior

de la exactitud topográfica, que será aquel en que se estimen las distancias con un diezmilésimo de error y los ángulos con 1″, pero que esto no significa en modo alguno, que siempre al ir á la práctica se resuelvan con igual escrupulosidad, pues fácil es comprender, que nosotros sólo lo hacemos por ser imposible recorrer toda la escala de los diversos grados de exactitud con que cada cuestión puede tratarse, y que así lo más acertado es referirse en el curso á lo más preciso. Por lo demás, á su tiempo daremos una regla para medir el grado de exactitud que en cada caso deba emplearse, y entonces también daremos algunos ejemplos.

Se notará la frecuente investigación de la influencia de los errores cuyos estudios deben merecer especial atención, pues ellos serán los que indiquen ese grado de exactitud á que antes nos hemos referido.

Al buscar la expresión de valores pequeños, se verá que con mucha frecuencia se hacen simplificaciones suponiendo exactos valores aproximados, é iguales á otros diferentes, lo cual se funda en el hecho de que una función pequeña tiene aún mucho más pequeños sus incrementos, y así, si consideramos estos incrementos como errores, los factores en función de los cuales estén, tendrán límites muy extensos, como en la introducción general se demostró.

17.—Veamos ahora cuál es el límite inferior de la percepción visual, natural y lineal.

Recordando en Física lo que es el ángulo visual, fácil será comprender que midiendo la distancia D á la cual ya no se perciba un cilindro de diámetro d, ese ángulo será el visual, y su expresión será dada por el triángulo isósceles que se forme con el diámetro del cilindro y la distancia á que se visa.

Para la expresión de ese ángulo se tendrá,

$$tan.\ \tfrac{1}{2}\ \alpha = \frac{d}{2D},$$

ó, lo que basta por su pequeñez,

$$\alpha = \frac{d}{D \; sen. \; 1''}.$$

Hechas varias experiencias, se ha encontrado en Europa, $\alpha = 90''$, como promedio para el común de los hombres.

De lo anterior fácil nos ha sido deducir el límite inferior de la percepción lineal que buscamos, pues siendo $0^{m.} 2$ la distancia general de la percepción distinta para las pequeñas magnitudes, con ésta y el ángulo $\alpha = 90''$ se puede formar un triángulo isósceles y buscar la base, cuya expresión, según las fórmulas anteriores, es,

$$d = \alpha \; D \; sen. \; 1''.$$

Suponiendo pues $D = 0{,}2$ y $\alpha = 90''$ resulta, $d = 0{,}^{m.} 000087$, para el límite buscado de la magnitud invisible á nuestro ojo.

Como el alumno vió que el ángulo visual es de $90''$, y sin embargo, se lleva la exactitud á $1''$, reflexioné que esto se debe al poder amplificador de las lentes de los anteojos; en cuya virtud un anteojo que amplifique 90 veces permitirá valuar los ángulos con $1''$, si los medios de leerlos se apropian al objeto, mediante los artificios que á su tiempo conoceremos.

PARTE PRIMERA.

TRIANGULACIÓN.

CAPÍTULO I.

MEDIDA DE LAS BASES.

18.—Sabido es que para medir una gran línea se aplica sobre ella otra menor, cuya longitud sea conocida, y que entonces, si es L la magnitud de la línea mayor, l la de menor y n el número de veces que aquella la contiene, resulta la relación,

$$L = n\, l \ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

Mas en la práctica no basta este conocimiento abstracto, pues siempre l tendrá cierto error, y así, es necesario ver cuál será su influencia en L.

Suponiendo pues que l tiene el error $d\,l$, resultará otro $d\,L$ en L, y tendremos, diferenciando la ecuación con L y l como variables.

$$d\,L = n.\ d\,l;$$

y como se tiene $n = \frac{L}{l}$, queda en fin,

$$d\,L=\frac{L}{l}d\,l.........5$$

Lo que demuestra que al medir una magnitud cualquiera, el error cometido es directamente proporcional á esa magnitud y al error de la unidad de medida, é inversamente proporcional á la longitud de la referida unidad de medida.

Ahora, de los tres factores L, $d\,l$ y l, sólo está á nuestra elección l, de donde resulta que siempre que fuere posible, debemos elegirla lo más grande que sea compatible con la comodidad de los trabajos. Esto es de la mayor importancia, pues si podemos elegir entre cintas de 10, 30 y 50 metros, por ejemplo, si el error con la de 10 es como 1, con las de 30 ó 50 será como $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{5}$ solamente, y se ve cómo es lógico tomar la de 50 metros sin vacilación alguna.

19.—Las medidas de las bases se hacen en Topografía con cintas de acero, cadenas de hierro ó cordeles, cuyas tres especies de instrumentos designaremos con el nombre genérico de "lineómetros." Vistas estas medidas en la clase, fácil será comprender, recordando los efectos de la elasticidad, que el orden por que las hemos enunciado es el de su exactitud, en la inteligencia de que entre los cordeles colocamos las cintas de lienzo, pues pronto pierden su barniz y se alargan más ó menos bajo el sol y el agua, como un cordel cualquiera; y respecto á las cadenas, por su peso son más difíciles de poner tensas que las cintas de acero, siendo además muy fácil que sus eslabones se enreden y las disminuyan en longitud, si tal cosa pasa inadvertida.

Conocidas estas medidas, y elegida una de ellas en vista de la exactitud que pida el trabajo, antes de emprender éste se mide la cinta, ó lo que sea, como sigue: hasta los diez milímetros, las cintas de acero; hasta los milímetros, las cadenas; y hasta los centímetros, los cordeles; cuya graduación se funda en el hecho práctico de que al medir una magnitud con esos instrumentos, y repetirla varias veces con suma atención, las discordancias son de milímetros, con las cintas; de

centímetros con las cadenas; y de decímetros con los cordeles; de donde resulta que midiéndolos con una decimal más de aquella que representa su aproximación, será lo suficiente para trabajar con ellos.

Suponiendo que se trabaje con cinta, y que tenga $50,^{m.} 0157$, y admitiendo que cupo 317 veces en la base, en números redondos, y que la fracción restante de la base, medida con la misma cinta, fué de $17,^{m.} 8754$; claro es que la longitud de la base será,

$$L = 317 \times 50,0157 + 17,8754 = 15872,^{m.} 8523.$$

Respecto á la medida de los lineómetros, se efectúa á su vez con un metro patrón, que se encuentra en los Municipios de todas las ciudades de cierta importancia; siendo de notar que las medidas obtenidas para las cintas y cadenas, pueden suponerse exactas, mientras una ruptura, torsión ó extensión fuerte, no hace presumir un cambio en ellas, al paso que los cordeles deben medirse al principio y fin de cada operación, pues muy fácilmente se alteran, si bien en cambio no es necesario para ellos el metro patrón, pues basta uno cualquiera como es fácil comprender.

20.—La medida de un lineómetro ó base de cierta importancia no se hace una sola vez, sino varias, y se toma el promedio. Mas puede suceder que algún resultado sea inaceptable, y así, refiriéndonos á las bases, vamos á ver cuándo debe desecharse.

Para ello, notemos que en la fórmula,

$$dL = \frac{L}{l} dl,$$

podemos hallar la solución de este problema. En efcto, se admitió como límite inferior de la percepción de la vista natural, $0,^{m.} 0001$, en números redondos; luego suponiendo, en el caso más desfavorable, que al comparar con un metro patrón la unidad de medida para la base, este límite es un error constante, y con signo igual cada vez que se aplique el

metro, la longitud l resultará con el error $0,^{m.}0001\ l$, siendo l el número de metros de la cinta ó cadena; es decir, se tendrá $d\,l=0,^{m.}0001\ l$. Llevando pues este valor á la ecuación anterior, nos quedará,

$$d\,L=\frac{L}{l}0,0001\,l=0,0001\,L\ldots\ldots\ldots 6$$

Se ve, según esto, que al medir una base topográfica de primera orden, no deberán admitirse discordancias superiores á un diezmilésimo de su longitud, pues recuérdese que ese límite supone el caso más desfavorable, siendo así, que tanto al medir varias veces el lineómetro como la base, obrará unas veces con un signo y otras con el contrario, y así, es de esperarse al fin del trabajo cierta compensación, y que dL resulte menor que $0,0001\ L$. Así, pues, si al repetir la medida del lineómetro ó la base, las discordancias son inferiores al límite de $0,0001\ L$, se aceptarán los resultados y se tomará su promedio; pero en caso contrario, se repetirá la medida por tercera y aun cuarta vez, según la introducción general, y se tomará el promedio de los resultados concordantes.

20.—Vamos ahora á ocuparnos de la ejecución material de la medida de las bases.

Visto y explicado en la clase un teodolito, se comprenderá fácilmente cómo su anteojo tiene un movimiento vertical, y su rectícula describe una línea sobre el terreno, y cuya línea no es otra cosa que un arco de círculo máximo de la tierra, que podemos tomar por recto, para la base. Además, montado el teodolito sobre un tripié, puede ponerse bajo su círculo horizontal una plomada que indica la vertical que pasa por su centro. Según esto, si elegido el terreno $A\ B$, fig. 5, para medir sobre él la base, se coloca un teodolito en a, y una señal en b, tal como una banderola, claro es que si arreglado el teodolito se dirige con su anteojo v una visual $v\ v'$ á la banderola, y después, con sólo el movimiento vertical del anteojo se lleva esta visual á c y d, y se clavan ahí unos pi-

quetes ó jalones, que son unas estacas de madera, los puntos *a d c b* resultarán sobre una línea recta. Mas no siempre es posible demarcar toda la base desde un solo punto, y entonces se hace por fracciones transportando el teodolito al último punto, por ejemplo á *b* en la figura citada, y colocando su vertical en el *b*, antes ocupado por una banderola, lo cual se logra con la plomada, se dirige el anteojo á *a;* y cubiertos los puntos *c*, *d* y *a* por su retícula, se gira el referido anteojo 180°, siendo evidente que así el nuevo elemento que se trace de la base, quedará en la dirección *a b*. Respecto á los jalones, se espacían á unos 100 metros, uniéndolos por un cordel para guiar sobre él la medida.

Demarcada la base, la figura 6 enseña cómo, por medio de un dinamómetro, se trabaja con la cinta á tensión constante, á cuya tensión se mide su longitud; y cómo también se van clavando las estacas $A\ A'$, sobre cuyas cabezas se trazan con lápiz fino las líneas *a b*, sobre el cero y fin de las divisiones de la ciuta.

21.—Tal ha sido hasta hoy el tipo de la exactitud; pero demostrado que puede obtenerse la exactitud de un diezmilésimo de las distancias en Topografía, no es ya ilusorio pretender armonizarlo todo á ese tipo de certeza.

Para ello son necesarios dos perfeccionamientos: eliminar la catenaria, ó reducirla á un límite despreciable, como se hace con los dinamómetros ó como luego veremos; y llevar en cuenta la temperatura, cuando su influencia sea superior á 0,0001 L.

I. Para lo primero, llevar en cuenta los efectos de la catenaria puesto que no se puede eliminar sino con reglas, cuyo empleo está reservado á la Geodesia, nos puede servir, para no emplear dinamómetros y expeditar el trabajo, la fórmula

$$c = R\sqrt{0{,}0024};$$

pues suponiendo $R=1$ y calculando á c en grados, se puede hallar la flecha a' que á esta condición responde, por el triángulo rectángulo formado con el radio, la mitad de la cuerda

y $\frac{1}{2}$ c. Por lo demás, esto supone que la catenaria es igual al arco de círculo que pasa por dos estacas y es tangente al suelo en que aquellas se apoyan. Basta trazar en un muro un gran arco de círculo y ver cuán bien coincide su elemento inferior con la curba de un cordel que se tienda cerca de su tangente horizontal inferior, para persuadirse de que basta esta solución. A la verdad que esta demostración es bien vulgar, pero es tan poco conocida y usada la catenaria, que para que se nos comprendiera sería necesario copiar aquí toda su teoría, lo cual nos distraería demasiado, pues sobre ser muy laboriosos los cálculos, son fuera de este lugar.

Pareciéndonos, pues, suficiente la demostración objetiva propuesta, continuemos.

Se ha encontrado c=300000, y como en la esfera terrestre á cada 30 metros corresponde 1″, para el ángulo de las verticales, resulta que en c hay 10000″ y 5000 en $\frac{1}{2}$ c; y esto, sea cual fuere el radio, puesto que no se busca un valor absoluto, sino una relación, y que es "cual es la flecha de un arco de círculo cuando la diferencia entre el arco y la cuerda es de un diezmilísimo del arco."

Ahora, se tiene,

$$\tfrac{1}{2}\, c = 5000'' = 1^\circ\ 00'\ 14''.$$

Así es que el cateto mayor $C\,b'$ del triángulo á que nos hemos referido, fig. 1, tendrá por valor,

$$C\,b' = R\ cos.\ \tfrac{1}{2}\, c \ldots\ldots\ldots = 0{,}9998405\ R;$$

por lo que para la flecha f se tendrá,

$$f = R - 0{,}9998\ R = 0{,}0002\ R;$$

y concretándose á un lineómetro cuya longitud sea c,

$$f = 0{,}0002\ R = 0{,}0004\ c.$$

Interpretando este resultado vemos que cuando la flecha sea los 4 milésimos del lineómetro, ya se comete un error

de un diezmilésimo al tomar el arco de la catenaria por su cuerda; pues á eso equivale medir con líneas flexibles una distancia, esto es, se comete un error sistemático.

Para aquellos que deseen una prueba analítica de lo anterior, pueden usar las fórmulas de la catenaria,

$$s=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right) \quad \text{é} \quad y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

en las que s, es el arco; h, la ordenada en el origen; e, la base de los logaritmos neperianos; x, la obsisa, é y la ordenada correspondiente á x. Con $s=1{,}0001\,x$, por tanteos resulta para $y—h=f$, un valor sensiblemente igual al aceptado.

Así, pues, si se acepta este método en lugar de dinamómetros, se facilitará su aplicación multiplicando la longitud de la cinta empleada por 0,004, y clavando estacas que sobresalgan del suelo la cantidad que dé el cálculo referido, tender las cintas hasta que besen el suelo solamente, pues entonces sus flechas serán de 0,004 l.

Ahora, puesto que el efecto de la calenaria es hacernos tomar una cantidad mayor que la real, en 0,0001, trabajando como se ha dicho, por l se debe tomar $l—0{,}0001\,l=0{,}9999\,l$.

II. Pasando á la corrección por temperatura, siendo de 0,0001 la exactitud topográfica y

$$0{,}000011$$

el coeficiente de dilatación del fierro, se ve que para 10° de calor ya resulta, 0,00011. Si pues en esta ciudad, México, se compara una cinta con un metro patrón, en invierno y á unos 10°, caso no exagerado, y luego se va á trabajar, por ejemplo, á Tamaulipas, en que hemos llegado nosotros á medir 36°, se tendrá por diferencia 26, esto es, el cambio de dilatación será 0,000286, más del doble del límite topográfico; casi el triple. Por l será, pues, necesario tomar $l\,(1—(t—t')\,c)$, siendo: t, la

temperatura á la cual se trabajó; t', la de la comparación con el metro patrón; y c, el coeficiente de dilatación del lineómetro.

Reuniendo ahora las dos correcciones, de flexión y temperatura, l será expresado por 0,9999 $(1-(t-t')\,c)\,l$, por lo que para L se tendrá,

$$L=0{,}9999\,n\,(1-(t-t')\,c)\,l.$$

Frecuentemente sucederá que n no sea un número entero, pues los extremos de la base se eligen sin atención á esto, y en tal caso, si l difiere en mucho de la magnitud que representa, en más de 0,0001 l, al medir la última parte de la base con esa cinta, esa fracción estará afectada del error, y será necesario ponerla en función de l para que al corregir á ésta quede corregida la fracción. Así, pues, si es n el número entero de cintas que entran en la base, y e la fracción de cinta, para n se tomará $n+\frac{e}{l}$.

Con todas estas precauciones, la expresión final de la base será,

$$L=0{,}9999\left(n+\frac{e}{l}\right)(1-(t-t')\,c)\,l\ldots\ldots\ldots 7,$$

tomando por l el valor real de la cinta.

Tal sería nuestro tipo de una base topográfica de primer orden y para trabajos extensos, con el fin de que los errores no se propaguen, pero claro es que bajo él los diversos grados de exactitud pueden cambiar cuanto se quiera, pues apenas sí habrá ciencia más flexible que la topografía, puesto que desde el croquis hecho á la memoria por un espía para operaciones militares, hasta las cartas en que se disputan los segundos, hay una distancia inmensa.

22.—Cuando se suprimen los dinamómetros, es costumbre arrastrar libremente las medidas, pero bien puede suplirse en

parte la falta del dinamómetro procediendo como lo indica la fig. 7, esto es, pasando la cadena entre los dedos índice y del corazón, cuyos dedos se apoyan en ella, y oponiendo el pulgar á la tracción apoyándolo contra la estaca, bien clavada y firme, se pone de tal modo el aza de la cadena sobre la cabeza de la estaca, que apoyando el lápiz en el aza se trace una línea perpendicular á la dirección de la base. Como se ve, estos son detalles de los cuales sólo nos ocupamos para dar una idea de cómo, en cada caso, siempre es posible sacar partido de medianos elementos bien manejados, pues fácil es tener una base practicando como lo hemos dicho, con la exactitud de dos diezmilésimos de L, que es casi igual á la que dan los dinamómetros.

12.—Si cada vez que cambiásemos de estación en un trabajo topográfico nos hubiésemos de situar perfectamente en la vertical del centro de ella, vertical indicada por el eje de la señal antes ahí puesta y quitada para instalar el teodolito, perderíamos unos seis ú ocho minutos; pero si no nos situamos dentro de cierta distancia de ese eje, perderemos exactitud.

Vamos, pues, á valuar el error cometido si no nos situamos en la referida vertical, para así proceder con acierto en cada caso, fig. 8.

Si es A el centro de estación, al medir el ángulo $B\ A\ C$; $a\ e\ a'\ e'$ la circunferencia del círculo de radio r dentro del cual sea admisible colocar la vertical del teodolito; y en fin, $A\ A'$ la visectriz del ángulo por medir; entonces vemos, que si nos colocamos en a, sobre la visectriz, y hacia $B\ C$, el ángulo $B\ a\ C=a$, es mayor que el $B\ A\ C=A$; y que si nos vamos colocando en i, e,........., al llegar á a' se tendrá $a' < A$. Luego, en los puntos $a\ a'$ se llega al mayor ó menor error. Calculémoslo pues en el punto a, por ejemplo. El triángulo $A\ a\ B$ nos dará,

$$r=K\frac{sen.\ a}{sen.\ \frac{1}{2}\ A}.$$

Ahora, en atencion á la pequeñez de α puede ponerse, *sen.* $\alpha = \alpha$ *sen.* $1''$; y respecto de A, siendo, como lo hemos demostrado, de $60°$ el valor medio de los ángulos en las operaciones topográficas, puede tomarse $A = 60°$. Con todo esto resulta, siendo *sen.* $30° = \frac{1}{2}$,

$$r = 2\ K\ \alpha\ sen.\ 1''.$$

Vemos ahora que si tomamos á α por la aproximación con que medimos los ángulos, esta fórmula ños dará el radio más allá del cual no debemos alejarnos del eje de las señales, y que calculando la constante con $\alpha = 1''$, resulta,

$$r = 0{,}00001\ K.........8.$$

Concluído este estudio, perdónese que hagamos observar cómo él nos indica que en las instalaciones del instrumento en lugar de las señales, puede existir una gran fuente de error, porque si en un trabajo dado el valor medio de k es de 10000 metros por ejemplo, resultará $r = 0{,}^{m}1$, y si, en consecuencia, al fijar el instrumento en el lugar de que hemos quitado una señal, para seguir midiendo nuestros ángulos, nos desviamos más de este límite, cometeremos un error apreciable. Creemos, por tanto, muy útil, conocer este límite al cual llamaremos "radio de instalación," porque él nos puede evitar trabajo inútil, con seguridad absoluta de no caer, sin embargo, en el extremo opuesto, esto es, en deslices intolerables. Por lo demás, esto supone un trabajo delicado, y así, si es α' nuestra aproximación angular en segundos en otros casos, se deberá multiplicar r por α'. Para evitar estas observaciones, recuérdese, según se dijo en la introducción, que siempre en nuestros ejemplos nos referiremos á lo más exacto.

Fácil será comprender que siendo tardado colocar la vertical del instrumento exactamente en el eje que ocupara la señal quitada, era casi indispensable esta investigación, dada una de nuestras principales miras en el presente tratado, cual

es, la de investigar en cada caso la influencia de los errores, para así poner un límite lógico á la libertad con que se opere.

23.—Como se habrá notado, en todo lo anterior hemos supuesto la base horizontal, pero como no siempre es posible hallar un terreno que lo sea, vamos á buscar su proyección cuando, sobre ésta, sea α la inclinación de la base.

Claro es que siendo $A\ B{=}B$, fig. 9, la base medida con el ángulo α sobre el horizonte $H\ H'$, su proyección $A\ C{=}b$ será, dado el triángulo rectángulo, $A\ B\ C$,

$$b{=}B\ cos.\ \alpha,$$

y como se tiene $cos.{=}1{-}2\ sen.^2\ \frac{1}{2}$, nos quedará,

$$b{=}B{-}2\ B\ sen.^2\ \tfrac{1}{2}\ \alpha \ldots\ldots\ldots 9,$$

siendo el término $2\ B\ sen.^2\ \frac{1}{2}\ \alpha$, á lo que se llama "reducción al horizonte;" y se toma en función del seno porque α siempre es muy pequeño, y en tales ángulos los cambios del coseno son casi insensibles, y así es mejor la función que hemos aceptado, pues al contrario, los senos pequeños tienen incrementos rápidos y pueden más fácilmente valorizarse con mayor exactitud. Por lo demás, esta reducción sólo se usa en trabajos de cierta importancia, y para tener una idea de cuándo la hemos de aplicar, vamos á calcular á α bajo la condición de que la reducción sea un diezmilésimo de la base.

Se tendrá,

$$sen.\ \tfrac{1}{2}\ \alpha{=}\sqrt{\frac{B{-}b}{2\ B}}, \ldots\ldots\ldots 10,$$

y suponiendo $B{=}1$ y $B{-}b{=}0{,}0001\ B$, resulta $\alpha{=}48'\ 24''$. Lo que enseña, que de no hacerse un levantamiento de primer orden ó tenerse $\alpha{>}48'$, no valdrá la pena efectuar la reducción.

24.—Sucede á veces en terrenos muy quebrados que ningún lado de la triangulación se encuentra sobre un terreno horizontal en toda su extensión, de uno á otro vértice, y

entonces se mide una pequeña base auxiliar y se liga con la red trigonométricamente.

Por ejemplo, supongamos que siendo $C D$, fig. 10, el lado de la red más próximo á un terreno plano en el que se pueda medir la base $A B$, se quiere calcular á $C D$. Pues medida la base $A B$ se toman los ángulos α y β en A; luego los γ y δ en B; y por último los C y ζ en C; con cuyos datos la trigonometría enseña la fácil resolución siguiente:

Por los triángulos $D C B$ y $A C B$

$$x=a\frac{sen.\ \delta}{sen.\ (\delta+\zeta)}=\frac{c\ sen.\ \beta\ sen.\ \delta}{sen.\ C\ sen.\ (\delta+\zeta)};$$

y por los triángulos $D C A$ y $A B C$,

$$x=b\frac{sen.\ \alpha}{sen.\ D}=\frac{c\ sen.\ \alpha\ sen.\ \gamma}{sen.\ D\ sen.\ C},$$

se tendrán, pues, dos resultados cuyo promedio será el valor de x, en la inteligencia de que para trabajos de precisión no se admitirá en ellos más error que aquel que al hablar del cálculo de los triángulos enseñaremos á calcular, pues la discordancia de los datos analíticos debe ser mayor que la de los directos, como es fácil entender.

Por este ejemplo se habrá comprendido cuán fácil será siempre ligar una base auxiliar á la triangulación, puesto que en todos casos habrá conocida una línea y cuantos ángulos sean necesarios. Sin embargo, las bases auxiliares deben eludirse hasta donde sea posible, pues implican más operaciones y, desde luego, más causas de error.

25.—Hay veces que el terreno sólo permite medir una base muy pequeña con relación á los lados de la red, y entonces se forma una red de triángulos cuyo único objeto es ir aumentando sus lados gradualmente, pues de no hacerlo así, resultarían ángulos muy agudos, y cuyos ángulos dan malos resultados, según se ha demostrado.

Para pasar de una base pequeña á una grande hay varios métodos.

I. De triángulos isósceles. En este método se mide una línea sobre la cual se forma un triángulo isósceles de grandes lados; luego, sobre uno de estos lados, otro triángulo mayor; y así sucesivamente.

II. De triángulos equiláteros. Sobre una línea se forman dos triángulos equiláteros y se calcula la diagonal del rombo que resulta; calculada esta línea, sobre ella se forma otro rombo cuya diagonal se calcula; y así se continúa hasta donde sea necesario; y

III. De triángulos comunes: en el que se aprovechan los puntos naturales que se prestan como vértices y vayan produciendo triángulos cada vez mayores.

Por lo demás, óbvio es que tanto en el método de triángulos isósceles como en el de equiláteros, no es rigurosa la forma, y si no se opera en un llano suficientemente extenso, bastará acercarse á aquellas prescripciones tomando los vértices de los cerros, campanarios, etc., que más se presten al objeto.

Finalmente, de estos tres métodos de acrecentar un lado, el segundo es el mejor, puesto que los ángulos son de 60°.

CAPITULO II.

TEORÍA GENERAL DE LOS GONIÓMETROS Y MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

26.—Supongamos que $e\ e'\ e''$, fig. 11, sea un círculo cuya circunferencia esté graduada; $Z\ Z'$ su eje; $c\,d$, un anteojo con dos movimientos de rotación, uno perpendicular á $Z\ Z'$ y que será paralelo al círculo $e\ e'\ e''$, y otro sobre un eje horizontal, y que será perpendicular al referido círculo; $A\ h$, una regla fija al anteojo y que resbala su extremo h sobre la circunfe-

rencia $e\ e'\ e''$, cuando aquel se mueve horizontalmente; y en fin, $i\ h$ un arco de 90, y perpendicular al círculo $e\ e'\ e''$, para medir la inclinación del anteojo. Dicho esto, supongamos horizontal á $e\ e'\ e''$, y es claro que cuando el anteojo $c\ d$ se dirija al punto b, figura dicha, la regla $A\ h$ cortará, prolongando su dirección, á la vertical de b en b', pues según lo supuesto, el plano $A\ b\ b'$ será vertical. Así, pues, el ángulo $b'\ A\ b$, llamado altura del punto b, será medido por el arco $h\ d$ del círculo $i\ h$, y por ejemplo igual á a; y si suponemos que en el círculo horizontal sea o el origen de las graduaciones, la correspondiente á b será $o\ h$, que llamaremos g. Comprendido lo anterior, fácil es ver que si pasamos el anteojo á la dirección $A\ a$ del punto a, la altura para este punto será $h\ A\ a=a'$, y su graduación horizontal $o\ g'$ que haremos igual á g'.

Hechas estas explicaciones, se ve que con un instrumento que las interpreta se puede medir la altura y rumbo á que un punto se halla, tal como b, que se encuentra del horizonte á la altura a, y del origen o de la graduación horizontal á la distancia g; y de aquí resulta también que conocidas las alturas a y a' y graduaciones g y g' de dos puntos a y b, se conocen sus distancias angulares, tanto vertical como horizontalmente, y que serán, respectivamente: verticalmente $a—a'$, y horizontalmente $g—g'$. Pues bien, todos los instrumentos modernos de Topografía para tomar en la red los datos angulares, se fundan en la construcción geométrica descrita, y si toman diversos nombres, se debe al cambio de sus detalles solamente, y cuyos detalles se verán en clase.

Mas de estos detalles hay cuatro que son comunes á todos los goniómetros fundados en los principios expuestos, y son: 1º, unos niveles paralelos al círculo ó limbo horizontal $e\ e'\ e''$ para ponerlo horizontal y desde luego vertical al eje del instrumento; 2º, un nivel fijo al anteojo, y paralelo á él, también para poderlo poner horizontal; 3º, una retícula al anteojo, compuesta de dos hilos muy finos colocados sobre un plano perpendicular al eje $c\ d$, cerca de c, y cruzándose para de-

terminar por su intersección un punto, con el cual y el foco del ocular en *c* del anteojo se materializa una línea que se llama de colimación, y es con la que se alinean los objetos visados; y cuya línea debe coincidir con el eje óptico del anteojo, y describir un plano vertical cuando este anteojo gire sobre su eje horizontal; y 4º, unos micrómetros para leer las graduaciones.

Estudiemos pues cada uno de estos detalles.

27.—I. NIVELES.—Si sobre una superficie $A\ B$ colocamos un nivel $n\ m$, fig. 12, fácilmente se comprende que puede estar el nivel horizontal sin estarlo la superficie, y también que pueden ser los dos paralelos, sin estar horizontales.

Por lo mismo, para estar ciertos de que una superficie es horizontal, es necesario que un nivel puesto sobre ella lo sea, pero con tal de que á la vez sea paralelo á esa superficie. Veamos pues qué relación hay entre los ángulos de un nivel con el horizonte y la superficie en que reposa, para así poderlos poner paralelos y luego horizontales.

Si sobre la superficie $A\ B$ antes mencionada, colocamos el nivel referido ya $n\ m$, claro es que si giramos á este nivel 180°, es decir, si hacemos que n venga á n' y m á m', las dos mitades del nivel $o\ n$ y $o\ m$, girando sobre el eje común $e\ e'$, habrán engendrado dos superficies cónicas cuyas generatrices son $n\ o\ n'$ y $m\ o\ m'$; que los ángulos $n\ o\ m'$ y $n'\ o\ m$ son iguales; que si llevamos $a\ b$ paralela á $A\ B$, y desde luego perpendicular al eje $e\ e'$ que fué el de la rotación, resulta $n'\ o\ b = m\ o\ b$; y finalmente, que se tiene $n'\ o\ m = 2\ m\ o\ b$; por lo que, en consecuencia, $o\ b$, línea paralela á $A\ B$, es la visectriz del ángulo $m\ o\ n'$, cuyo ángulo no es sino el formado por el nivel en sus dos posiciones, directa é inversa. Luego, "si sobre una superficie se pone un nivel en sus posiciones directa ó inversa, la visectriz del ángulo formado por esas dos posiciones es paralela á la superficie."

Tal es en lo absoluto la teoría fundamental de los niveles, conocida bajo el nombre de "principio de inversión." Expuesto el principio, hé aquí un caso particular de él:

Si suponemos que $H\ H'$, fig. 12, es el horizonte, y que al poner el nivel en su primera posición $n\ m$, ó posición directa, lo nivelamos, resultará, que viniendo $o\ m$ á $o\ o$, será el nivel paralelo á $H\ H'$, y $a\ b$, después de la inversión, paralela á $A\ B$. Los ángulos $b\ o\ o_{\prime}$ y $B\ e\ H'$ serán, pues, iguales bajo tal hipótesis; pero como $B\ e\ H'$ no es sino el ángulo de la superficie con el horizonte, y la mitad del ángulo del nivel en sus dos posiciones, aun podemos decir: "Si sobre una superficie colocamos horizontalmente un nivel, al invertirlo, el ángulo que señale será doble del que forma la superficie con el horizonte." De esta última manera es como se conoce generalmente el principio de los niveles, pero habiendo observado que por lo regular no se comprende fácilmente, hemos querido seguir el primer camino que es el absoluto, y luego pasar á su aplicación; esto es, separar los dos fenómenos geométricos, pues cogiéndolos bajo una sola demostración, queda ésta algo vaga y confusa.

Conocido el teorema anterior, fácil es comprender cómo se nivela un goniómetro, recordando que un plano queda fijo de posición cuando de él se conocen dos líneas.

Para nivelar, pues, el limbo de un instrumento, se puede proceder ó por el método común ó por el nuestro, como sigue:

Método común: Se pone el nivel en dirección de dos de los tornillos del limbo que lo une al tripié, llamados tornillos nivelantes, y luego, con estos tornillos se lleva al 0 la burbuja; después se gira á 180° el limbo, y siendo a la lectura del nivel, se corrige $\frac{1}{2}\ a$ por los tornillos de sus piés, y $\frac{1}{2}\ a$ por los nivelantes del limbo. Hecho esto, se pone el nivel á 90° con la dirección anterior, corregida ya, y como ya está paralelo al limbo, se lleva al 0 con sólo el tercer tornillo nivelante.

Método nuevo: Puesto el nivel en dirección de dos de los tornillos nivelantes, se lee la indicación de un extremo, por ejemplo, el que esté á nuestra derecha; luego se invierte 180° y se lee á igual lado su nueva indicación b, y conocidos a y b, se corrige el paralelismo del nivel y el limbo elevado $\frac{1}{2}\ (a—b)$

el extremo bajo del nivel ó bajando el alto, con lo cual el nivel y el limbo quedarán paralelos. Después se pone horizontal el nivel y desde luego el limbo, con sólo los tornillos nivelantes; y por último, hecho esto, se continúa como en el método anterior.

Como es fácil comprender, no es indiferente, según los diversos mecanismos de los instrumentos, emplear uno ú otro sistema de los dos expuestos, y así, por nuestra parte, hemos observado que el cleps lo nivelamos más prontamente con el segundo método.

Debemos decir que corregidos los niveles en una estación, al pasar á otra ya estarán bien, y así bastará sólo nivelar al limbo, con los tornillos de su pié. Sin embargo, de vez en cuando se revisa el todo leyendo el nivel en dos posiciones inversas, y entonces, y según lo anterior, si sus lecturas son iguales hacia un mismo lado, por ejemplo, en el extremo que queda á nuestra derecha, el nivel es paralelo al limbo, y sólo debemos corregir con los tornillos nivelantes; pero si estas indicaciones son diferentes, entonces es que se ha perdido todo, paralelismo y horizontalidad, y debemos corregir ambas cosas moviendo los tornillos del limbo y del nivel.

NIVELACIÓN DEL LIMBO HORIZONTAL.—Por lo demás, sépase que es muy raro nivelar un teodolito desde el primer intento, cuando sus niveles son sensibles, y que así, por lo regular, estas correcciones necesitan varios tanteos en los que los errores van disminuyendo poco á poco, hasta llegar á un límite aceptable en vista de la importancia del trabajo. Como esto puede dejar en el principiante cierta duda sobre el momento en que un teodolito está ya bastante bien nivelado, veamos qué influencia tiene un error en la horizontalidad del limbo azimutal, que así se llama aquel de que nos ocupamos, sobre la medida de los ángulos horizontales.

Si el limbo en cuestión estuviera horizontal en $a\ b\ c$, fig. 13, el ángulo entre las señales A y B sería $a = e\ e'$; pero supuesto con cierta inclinación $e'\ e\ e''$, el arco que nos medirá será el $b' = ee''$.

Se forma pues el triángulo esférico $e\,e'\,e''$ rectángulo en e'', puesto que se supone correcto todo lo demás del instrumento, y por lo tanto perpendicular al limbo azimutal $a\,b'\,c'$ el plano vertical que describiría el anteojo si fuera horizontal el limbo.

Según esto, se tiene,

$$cos.\ a = cos.\ b'\ cos.\ x + sen.\ b'\ sen.\ x\ cos.\ e'';$$

pero como $e''=90°$, resulta,

$$cos.\ x = \frac{cos.\ a}{cos.\ b'} \ldots\ldots\ldots 11,$$

y ahora,

$$cos.\ x = \frac{cos.\ a}{cos.\ b'} = cos.\ a\ cos.\ b' + sen.\ a\ sen.\ b'\ cos\ i;$$

y dividiendo por $cos.\ a$, multiplicando por $cos.\ b'$ y despejando á $cos\ i$,

$$cos.\ i = \frac{tan.\ b'}{tan.\ a} \ldots\ldots\ldots 12.$$

Si ahora es $\Delta\,a$ el error angular admisible, se deberá tener $b'=a+\Delta\,a$, puesto que se debe admitir $cos.\ i<1$, y en consecuencia, tangente b' menor que tangente a; lo cual indica, que dada la figura, la inclinación del limbo horizontal produce el efecto de disminuir los ángulos cuando la parte del limbo en que se miden está sobre el horizonte y de aumentarlos cuando está bajo él.

Podemos ya formarnos una idea exacta de la influencia de la inclinación del limbo. Para ello supongamos $a=60°$ y $b'=59°\ 59'$; y hallaremos:

$tan.\ b'$	0,2385524
$tan.\ a$	—0,2385606
$cos.\ (i=21'\ 10'')$	9,9999918.

Según esto, y variando el valor de las divisiones de los niveles topográficos de 30″ á 1′ por lo general, vemos que la nivelación del limbo será suficiente aun cuando su burbuja se desvíe unas cinco á seis divisiones de su centro; pero téngase presente que esto es sólo para la medida de los ángulos horizontales. En efecto, el valor de x mide la influencia del error en un ángulo vertical, y así, calculando con los datos expuestos, queda

$$\begin{array}{lr} \cos.\ a \ldots\ldots\ldots\ldots & 9{,}6989700 \\ \cos.\ b' \ldots\ldots\ldots\ldots & 9{,}6989737 \\ \hline \cos.\ (x{=}14'\ 10'') \ldots\ldots\ldots & 9{,}9999963; \end{array}$$

error tan fuerte como débil fué el anterior.

Váyase pues notando cómo el conocimiento profundo de los efectos de los errores puede dispensarnos del trabajo inútil de corregirlos en ciertos casos, aun cuando sean muy fuertes, y cómo esos mismos errores, aun muy débiles, deben corregirse en otras ocasiones.

De tal modo es importante este punto, que sin duda puede decirse que toda ciencia de aplicación consiste en el conocimiento de los efectos de los errores, pues lo difícil no es hacer las cosas, sino hacerlas con sólo la exactitud necesaria, para no emplear en ellas sino el tiempo y gastos indispensables.

Después de lo anterior, dicho queda cómo debe hacerse para que el nivel del anteojo le sea paralelo. Se pondrá el anteojo sensiblemente horizontal y se leerá la indicación a del nivel, á cierto lado del observador; después se invierte 180° el anteojo girando el teodolito sobre su eje vertical, y si es b la nueva lectura del nivel, á igual, se baja ó sube $\frac{1}{2}(a-b)$ uno de sus pies, con lo cual el nivel y el anteojo quedarán paralelos. Por lo demás, bien puede ponerse el nivel exactamente en 0 en la primera posición, pero fácil es comprender que de cualquier modo puede operarse.

28.—II. Nivel del anteojo.—Como se habrá notado, el

nivel del anteojo es completamente ajeno á la medida de los ángulos horizontales. Él sirve, pues, para la nivelación, en la cual se miden ángulos verticales, partiendo del horizonte con su auxilio. Cuando se corrige para tales trabajos, es necesario ser escrupuloso en establecer perfectamente su paralelismo con el anteojo, porque el error que exista entrará íntegro en las operaciones.

En efecto, viendo un teodolito, se comprenderá que para tomar la altura $H' C B$ de un punto B sobre el horizonte $H H'$, fig. 14, se hace primero que el anteojo puesto horizontal, coincida con el radio del 0° de la graduación del limbo $a\ b\ c$, pues claro es que si no son paralelos sino que forman el ángulo H', $C H_1^1$, al poner horizontal el nivel $e\ e'$, bajará el anteojo hasta Ce, por ejemplo, y estableciendo entonces nosotros allí el 0° del limbo vertical, paralelo al anteojo, tomaríamos para los ángulos verticales un origen erróneo que entraría íntegro en ellos, pues refiriéndonos á la figura y al punto B, en vez del ángulo $H' C B$, tomaríamos $H' C B—H' C H_1^1$, cometiendo el error $H_1^1\ C H'$. Por esta razón el nivel del anteojo no sólo se corrige más exactamente que los del limbo, sino que es mucho más sensible que ellos.

Para la corrección, paralelos el nivel y el anteojo, se pone éste horizontal y se lee la indicación del círculo vertical, la que generalmente no es cero; pero entonces, ó se mueve el círculo para que sea cero, ó la lectura se lleva en cuenta como error de origen. Por lo demás, estos son detalles que el alumno debe estudiar objetivamente en clase y bajo la explicación verbal, si quiere economizar tiempo y gasto intelectual.

Finalmente, nótese que en lo anterior se han supuesto errores moderados en los instrumentos, debidos á las pequeñas dislocaciones inevitables de sus piezas, por las imperfecciones de construcción y por el uso; pero que es evidente que siendo, por construcción, perpendicular el eje del instrumento al limbo azimutal, las desviaciones á que nos hemos referido no deberán pasar de ciertos límites, desechando para trabajos de

precisión todo instrumento que los tenga superiores á los errores calculados anteriormente como admisibles.

A pesar de todo el cuidado que se ponga al nivelar un teodolito para tomar ángulos verticales, por lo general el nivel acusará graduaciones diferentes, debidas á la inclinación de la columna, inclinación que en ciertos casos será necesario llevar en cuenta, como sigue:

Si la burbuja se redujese á un punto, éste estaría en el centro del nivel, y al inclinarse éste, las divisiones que recorriera el punto marcarían la inclinación del nivel; mas teniendo la burbuja dimensiones, al inclinarse el nivel, su inclinación se hallará por la diferencia de las indicaciones de los extremos de la burbuja entre la posición inclinada y la horizontal. Así, pues, si estando el cero en el centro, los extremos de la burbuja indican h á cada lado, é inclinando el nivel o hacia el lado alto y e al bajo, la inclinación señalada por cada extremo será: por el alto $o—h$, y por el bajo $h—e$. Claro es que una de estas dos expresiones bastaría, pero su promedio será más exacto y dará,

$$\frac{(o-h)+(h-e)}{2}=\tfrac{1}{2}(o-e);$$

y se ve que para obtenerlo basta tomar la semidiferencia de las lecturas del nivel.

Lo anterior sería suficiente si se supiera que el nivel era perpendicular exactamente al eje vertical $z\,z'$ del instrumento, fig. 11, pero como puede formar cierto ángulo con él, lo que importa es conocer su inclinación total sobre el horizonte, puesto que, á partir de allí, se cuentan los ángulos verticales hallando el origen precisamente con el nivel, el cual ya queja fijo al círculo una vez tomada por cero la graduación con que coincide, del círculo referido.

Se ve pues que para conocer la inclinación absoluta del nivel, y desde luego del cero del círculo vertical, es necesaria la inversión de aquel. Por consiguiente, si en la primera vez las lecturas son o y e, la inclinación del nivel será $\tfrac{1}{2}(o—e)$, y si después de la inversión, se tiene o' y e', la nueva inclina-

ción será $\frac{1}{2}(o'—e')$, por lo que la inclinación de la visectriz $o\ b$, fig. 12, será $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(o—e)+\frac{1}{2}(o'—e'))=\frac{1}{4}((o—e)+(o'—e'))$; que será necesario sumar con su signo á la lectura del círculo vertical, como veremos en la nivelación. Por lo demás, el valor anterior está valuado en divisiones del nivel, y para introducirlo en la altura del objeto observado, es necesario reducirlo á segundos de arco. Para esto, si el valor en segundos de una división del nivel es v, el valor en segundos del arco anterior que llamaremos x será,

$$x=\frac{1}{4}((o—e)+(o'—e'))\ v.........13.$$

Respecto á v se puede determinar de dos modos, según que el instrumento tenga círculo vertical ó no lo tenga.

1º Si tiene círculo vertical, se pone horizontal el nivel y se lee la indicación a del círculo; luego, se inclina el nivel solo y se leen él y el círculo. Como en la horizontalidad en el nivel se tiene $o=e$, resulta, si la segunda lectura del círculo es a', y puesto que no hay inversión,

$$a'—a=x=\frac{1}{2}(o'—e')\ v.........v=\frac{2\,x}{o'—e'}.........14$$

2º Si no hay círculo vertical, se pone el nivel horizontal y se lee á un estadal á distancia conocida; se inclina el nivel y se leen sus indicaciones y el estadal; y en fin, con la distancia del estadal y la diferencia de sus lecturas se forma un triángulo rectángulo que nos da á x, con lo que, y $(o'—e')$, se calcula como antes á v. En cuanto á los estadales, véanse en clase.

29.—III. Retícula.—Para que la línea de colimación coincida con el eje óptico del anteojo, cuyo eje á su vez debe coincidir con el longitudinal de la pieza, y describir un plano vertical al girar sobre su eje horizontal, claro es que ambas líneas, de colimación y eje horizontal, deben ser perpendiculares entre sí.

Para este estudio, dividiremos la cuestión, exagerando la figura para facilitar su comprensión.

I. Colimación horizontal.—Supongamos que para hacer coincidir la línea de colimación $C\ C'$ con el eje $A\ B$ del anteojo, fig. 15, sea $A\ B$ el plano vertical del teodolito considerado, y que la línea de colimación esté fuera de este plano, y en su mayor separación de él, por ejemplo, en $C\ C'$, siendo C el ocular y C' una señal puesta sobre la dirección $C\ F$ de la línea de colimación, y fuera del eje $A\ B$ del anteojo. Claro es que si por cualquier medio se gira 180° el anteojo sobre su eje $A\ B$, la línea de colimación $C\ C'$ vendrá, después de la rotación, á C, C'', siendo C'' una segunda señal; esto es, la línea de colimación referida $C F$, forma á la inversión un ángulo $C' o\ C''$, duplo de su separación angular $C'\ o\ B$ del eje $A\ B$ del anteojo. Fácil será, pues, llevarla á $A\ B$, es decir, ponerla en el plano normal al eje horizontal del anteojo, moviendo á derecha ó izquierda el hilo vertical de la retícula, lo que se comprenderá mejor viendo un instrumento. La retícula estará, pues, en el plano vertical que pasa por el eje longitudinal de rotación del anteojo, pero aún quedará fuera de ese eje. Comprendida la corrección anterior del error de colimación horizontal, fácil será corregir la colimación vertical.

II. Colimación vertical.—En efecto, si girando el anteojo sobre su eje longitudinal $A\ B$, fig. 16, se pone una señal K, sobre un muro, cuando la retícula se eleve lo más de que es susceptible; y luego, girando el anteojo 180° sobre el referido eje $A\ B$, se pone otra señal K', es evidente que el error será $K'\ o\ B$, y que se corregirá moviendo verticalmente el hilo horizontal de la retícula, para llevar ésta á B, tomando $K'\ B = \frac{K\ K'}{2}$.

Hecha la coincidencia de la línea de colimación con el eje óptico del anteojo, es necesario después que al girar éste sobre su eje horizontal, sea vertical el plano que engendre aquella, para que al tomar los ángulos horizontales entre dos objetos con el limbo azimutal, queden verdaderamente reducidos al horizonte.

Para ello, se dirige una visual á una arista vertical de un

edificio, ó á falta de éste, al hilo fino de una plomada suspendida delante del teodolito, que será lo mejor; y si la retícula no cubre á la arista ó al hilo constantemente, al girar sobre su eje horizontal el anteojo, claro es que ese eje está inclinado y que deberá elevarse ó bajarse uno de sus apoyos. Nada hemos dicho de la ejecución material de estas correcciones, porque variará en los diversos instrumentos, según sus mecanismos lo permitan.

Respecto á la aplicación de la arista de un edificio, es necesario en el valle de México y lugares cenagosos de un piso falso, no olvidar que son frecuentes los desniveles en las construcciones, y que en tal caso es preferible el uso de la plomada.

Nivelación del círculo vertical.—Antes vimos que un error en la inclinación del limbo horizontal hasta de 20′, y aun 1° y 2° en trabajos corrientes, era indiferente para la exactitud de las medidas de los ángulos horizontales, é intolerable en las de los ángulos verticales; y ahora es necesario hacer notar que un error en la horizontalidad del eje del anteojo, es al contrario, de grandes consecuencias en las medidas de los ángulos horizontales, y de pequeñas en las de los verticales.

En efecto, según la figura 17, vemos que si el eje $e\ e'$ del anteojo fuera horizontal, al visar el punto A, la indicación en el círculo azimutal sería $o'\ a$; pero que si es inclinado ese eje respecto del horizonte, ya no será vertical el arco $A\ a$ sino también inclinado según $A\ a'$, y que así en vez de la lectura correcta $A\ a$, se tendrá la errónea $A\ a'$, siendo $a\ a'$ el error azimutal en virtud de la inclinación del ya referido eje horizontal del anteojo.

Para valuar los efectos de este error, nos valdremos del triángulo esférico $A\ a\ a'$ rectángulo en a y cuyos lados son la altura errónea $A\ a'$ la correcta $A\ a$, el error azimutal $a\ a'$, y siendo la inclinación i, el ángulo diedro en $A\ C$ que mide la inclinación del eje horizontal del anteojo. Se ve que este caso no es sino el del párrafo 27, fig. 13, sin más que invertir

los arcos azimutales de aquel, por las alturas de éste; la inclinación del limbo azimutal de allá, por la inclinación del limbo vertical perpendicular al eje horizontal del anteojo aquí, y en fin, el error en altura $e' e''$ de aquel caso, por el azimutal $a a'$ de éste.

Así, pues, tendremos ahora,

$$cos.\ x = \frac{cos.\ a}{cos.\ b},$$

y

$$tan.\ b = tan.\ a\ cos.\ i.$$

Suponiendo en esta última ecuación $i = 21'\ 10''$ y $a = 60°$, resulta $b = 59°\ 59'\ 59''$; es decir, un error de 21′ 10″ en la inclinación del eje horizontal del anteojo, sólo produce 1″ de error en la altura. Mas si con estos valores de a y b se calcula á x, resulta, $x = 14'\ 10''$; esto es, un error casi igual á la inclinación del eje del anteojo, que fué supuesta de 21′ 10″.

Fácil es, según esto, deducir la regla siguiente:

"La medida de los ángulos horizontales requiere una nivelación aproximada del círculo azimutal y exacta del vertical; y al contrario la de los verticales." Sin embargo, óbvio es prever que las correcciones deducidas por estos estudios deben hacerse no sólo con el cuidado por ellos indicado, sino atendiendo también al estado de uso de los instrumentos, debiendo verificarlas con la debida frecuencia, atendiendo al estado de uso referido.

Por lo que hace á la perpendicularidad del eje vertical del instrumento con el limbo azimutal, los fabricantes cuidan que sea exacto; y además, es estable. Según esto, si un instrumento está en buen uso, puede decirse:

"Para los ángulos horizontales nivélese aproximadamente, según la sensibilidad de los niveles, y para los verticales, con más cuidado, y llevando en cuenta las indicaciones del nivel para la corrección x, si es necesaria."

Para eliminar los errores hasta donde sea posible, se usa

á veces repetir la medida de los ángulos, invirtiendo las posiciones del anteojo, cuando su mecanismo lo permite, girándolo 180° en azimut y otros tantos en altura, con lo cual el limbo en que se apoya y que lleva los vernieres, cambia naturalmente 180°, y así se miden los ángulos con diversas graduaciones del círculo azimutal, para eliminar los errores de excentricidad que puedan existir, y con esto y moviendo de vez en cuando el limbo fijo, se obtiene una medida muy aproximada. Este método de observar no presenta inconveniente alguno cuando no hay error de colimación; pero si al contrario, existe algún error intolerable, es necesario que las inversiones, de usarse, sean un número par, para que pueda destruirse, puesto que tendrá signos contrarios en dos posiciones del anteojo.

De no tener esta precaución, mejor sería no repetir las medidas en las dos posiciones, sino en una, corrigiendo la colimación, pues los errores de excentricidad de la graduación son muy pequeños en los instrumentos modernos, y en consecuencia no debe temerse un error notable á causa de ellos; pero los errores de colimación del anteojo, siendo notables, sólo pueden eliminarse en la medida de un ángulo, por la observación directa ó inversa. Mas si ésta no se hace y si las señales visadas están próximamente á igual altura, los errores referidos, más que en la amplitud del ángulo, influirán en la dirección de sus lados, y como la desviación de esta dirección será igual en toda la red, si se trabaja con el anteojo en una posición constante, el efecto final equivale á una desviación de la red, que será menor en sus efectos, á los errores que produjera tomar los ángulos en una posición cualquiera del instrumento, tomada indistintamente.

En los errores de colimación hemos supuesto céntricos los anteojos, pero si son exéntricos, claro es que la corrección se hará como sigue: nivelados el instrumento y el anteojo, diríjase éste normalmente á un muro y póngase una señal sobre la dirección de la retícula; gírese luego el anteojo 180° en azimut y otros tantos en altura y póngase otra señal; únan-

se las dos señales, y sobre la línea que resulte constrúyase, sirviendo de diagonal, un rectángulo de lados verticales y horizontales; y en fin, la mitad del lado vertical representará el error de colimación vertical, y la mitad de la diferencia del lado horizontal al doble de la excentricidad del anteojo, la colimación horizontal. Las correcciones quedarán, pues, indicadas.

30.—IV. MICRÓMETROS.—Pasemos ahora á la lectura de los ángulos. Visto un teodolito, fácil será comprender cómo se hace la lectura de los grados y medios grados, y así, sólo explicaremos cómo se aprecian las fracciones menores. Para ello hay dos métodos generales: el del vernier y el del micrómetro.

A.—VERNIER.—La combinación del vernier es la siguiente: Si en una regla dividida $A\ B$, fig. 18, se toman n partes de a á b, por ejemplo, y se adapta una pequeña regla $a'\ b'$ igual á las n partes $a\ b$, pero dividida ella en $n+1$ partes; puesto que cada parte $a\ e'$ de $a\ b$ y $a'\ e$ de $a'\ b'$ valdrán respectivamente $\frac{a\ b}{n}$ y $\frac{a'\ b'}{n+1}$; se tendrá,

$$e\,e'=a\,e'-a'\,e=\frac{a\ b}{n}-\frac{a'\ b'}{n+1},$$

y como $a\ b=a\ b'$, resulta,

$$e\,e'=\frac{a\ b}{(n+1)n},$$

pero como $\frac{a\ b}{n}$ es igual con $a\ e'$, según la figura, nos queda en fin,

$$e\,e'=\frac{a\ e'}{n+1};\ldots\ldots\ldots 15$$

y es evidente que también se tiene $e''\,e_{,}=\frac{2\ a\ e'}{n+1}$; $e''\,e_{,,}=\frac{3\,a\,e'}{n+1}$; y así suscesivamente, si más divisiones hay.

Dicho lo anterior, fácil es comprender que si para medir

un objeto tal como CD, fig. 19, se pone su extremo C alineado con A, y yustapuesto el vernier en D, las divisiones e y e' coinciden ~~con e'~~, el objeto tendrá la longitud de una división de la regla, más la fracción $e\,e'$, fórmula 15, valuada por el vernier. Ahora bien, á esta menor distancia $e\,e'$ que puede apreciar un vernier, es á lo que se llama su aproximación, y por la fórmula vemos, siendo $a\,e'$ una división del limbo, aplicando á un goniómetro el caso, y $n+1$ el número de divisiones del vernier, que podemos decir "la aproximación de un instrumento es igual á una división del limbo, partido por el número de divisiones del vernier."

Para concluir este punto, veamos el ejemplo gráfico siguiente:

$A\ B$ es un limbo dividido de diez en diez grados por grandes líneas normales á la circunferencia $B\ A\ C$, fig. 20, y en cuyos extremos están grabados los grados transcurridos desde el 0, de decena en decena; después, en los intermedios hay líneas menores que indican fracciones de cinco grados; luego, entre estas, otras cuatro más pequeñas todavía, para dividir en grados los espacios anteriores; y en fin, aun estos últimos espacios están divididos en medios grados, por lo general, aunque en nuestro ejemplo suponemos la división del limbo, en grados. Respecto al vernier, está en la lámina $A'\ B'$, la cual, del 0 al 30 de sus divisiones, corresponde á 29 divisiones del limbo; por lo que, valiendo cada división del limbo $1°=60'$, y estando dividido el vernier en 30 partes, su aproximación será $\frac{60'}{30}=2'$. Para leer pues la indicación, vemos que el 0 del vernier está después del número 10 del limbo, luego serán 10 las decenas de grados; después, para apreciar las unidades, vemos que el 0 referido del vernier está después de la octava división del limbo, á partir del número 10, y que así debemos añadir ocho grados á los anteriores; y finalmente, estando la coincidencia entre las divisiones del limbo y del vernier, á las quince divisiones de éste, á partir de su cero, y valiendo cada una dos minutos, según la fórmula

15, la última aproximación de la lectura será de $15 \times 2' = 30'$. Así, pues, la lectura total es $18° \ 30'$. Además, para facilitar las lecturas, los números del vernier indican los minutos hasta ellos corridos cuando entre dos se efectúa la coincidencia.

B.—MICRÓMETROS.—Si se supone un marco $A\ B$, fig. 21, con una sierra $a\ b$ y un hilo $c\ d$, y luego otro marco más pequeño, $C\ D$ con un tornillo t y un hilo $c\ f$, y cuyos lados $C\ C'$ y $D\ D'$ pueden resbalar en los $A\ A'$ y $B\ B'$ del grande, y la espiga t de su tornillo dentro su hembra e' en aquel marco, bien se ve que podemos poner este pequeño marco dentro del grande, fig. 22; y puesto, es evidente que con el tornillo se puede hacer resbalar dentro de aquel, para que los hilos $c\ d$ y $c\ f$ se separen más ó menos.

Este mecanismo es conocido bajo el nombre de micrómetro, y su aplicación es la siguiente: supongamos que puesto sobre la regla $A\ B$, en cuyo sentido $A\ B$ esté su graduación, se ve que el hilo fijo en el gran marco está después de la división 40. Obvio es ahora admitir que si ponemos el hilo móvil del pequeño marco en la división 40, y luego, moviéndolo, hasta ponerlo sobre el fijo, contamos las vueltas que para ello dió el tornillo, se conocerá el espacio referido tan luego como se conozca el valor de cada una de sus vueltas, que será de la altura de su paso, que á su vez es igual á un diente de sierra, con el fin de que contando el número de dientes que recorra el hilo móvil, se sepa el número de vueltas del tornillo, y se facilite así su aplicación.

Respecto á la valuación del paso del tornillo y su relación con los dientes de la sierra, se hace como sigue: se mide en milímetros la longitud del tornillo que constituya su carrera, y siendo l esa longitud, y n el número de pasos en ella contenidos, el valor v de cada uno será,

$$v = \frac{l}{n} \ldots\ldots\ldots 16,$$

y después, si al roscar el tornillo, desde su origen del movi-

miento al fin de él, recorrió el hilo móvil n' de los dientes de sierra, el valor v' de cada diente será,

$$v'=\frac{l}{n}\text{.........}17.$$

Por ejemplo, si la carrera del tornillo es de 17 pasos, y estos tienen una longitud de $16,^{mm}6$, se tendrá $v=\frac{16,6}{17}=0,^{mm}98$ para el valor de cada paso, y si estos 17 pasos recorren 18,5 dientes de la sierra, el valor de cada diente será,

$$v'=\frac{17}{18,5}=0,^{mm}92.$$

Finalmente, la cabeza del tornillo está dividida, y así, si el valor de un diente se divide por su número n'' de divisiones, el valor v'' de cada división será $v''=\frac{v'}{n''}=\frac{v}{n''}$, con lo cual se lleva aún mucho más lejos la aproximación; pues suponiendo $n''=100$, resultaría $v''=\frac{0,92}{100}=0,^{mm}0092$, es decir, se apreciarían con el micrómetro construído bajo los supuestos anteriores, hasta los millonésimos de metro.

Comprendido el micrómetro se ve que para aplicarlo á la medida de los ángulos bastará valuar en esta magnitud á sus indicaciones.

Suponiendo pues que se pone el hilo fijo en coincidencia con una división a del limbo, fig. 23, y que dando al tornillo 16 vueltas enteras y una fracción de 0,49 con las divisiones de su cabeza, en su carrera el hilo móvil recorre 3° en números redondos, el valor de cada división de su cabeza será en segundos,

$$v''=\frac{3\times 3600}{16,49}=654'',9.$$

Tal es la teoría del micrómetro, pero debe saberse que su

empleo es más frecuente en Astronomía, en donde permite apreciar los ángulos de segundo en segundo. Sin embargo, se encontrará algunas veces en Topografía, para medir ángulos muy pequeños, en un telémetro que á su tiempo conoceremos, y así, no es por demás dar desde ahora su teoría puesto que hablamos de la medida de los ángulos.

Además, el cleps lo usa también aunque simplificado, pues todo se reduce á poner tres ó más hilos al microscopio para que sirvan como índices de referencia, según lo veremos en cátedra.

31.—I. Medida de los Ángulos.—Conocidos el vernier y el micrómetro, bien se ve que para medir el ángulo $B\ C\ A$ entre dos objetos A y B, fig. 24, bastará dirigir á ellos dos visuales, y tomando las dos lecturas g y g' en el limbo, cuyo 0 supongo en o, el ángulo a será $a = g' - g$.

Por lo demás, generalmente no bastará una sola medida sino varias, hasta que el número de resultados concordantes dentro del error admisible, sea cuando menos la mitad más uno del total de observaciones, según se demostró en la introducción general.

Por ejemplo, en un trabajo dado se quieren los ángulos con 45″ de exactitud con un teodolito que dé 30″. Pues supongamos que el primer valor de un ángulo sea 64° 27′, y el segundo 64° 28′ 30″. La diferencia son 90″, mayor que 45″; luego se debe repetir la medida. Si esta es v. g. 64° 28′, como 64° 27′ y 64° 28′ áun difieren 1′=60″, se debe continuar la repetición. Otra medida nos da, supongamos, 64° 27′ 30″. Con este resultado intermedio entre 64° 27′ y 64° 28′, áun no queda fijo el ángulo, pues hay cuatro resultados y sólo dos concuerdan dentro de 45″, y son 64° 27′ y 64° 27′ 30″, ó bien, 64° 28′ y 64° 27′ 30″. Será necesario otra medida. Sea ésta, 64° 27′ 30″. Ya habrá más resultados concordantes que discordantes.

En efecto, los resultados son:

1º.........	64° 27′ 00″
2º.........	64 28 30

3º......... 64° 28′ 00″
4º......... 64 27 30
5º......... 64 27 30

que ordenados por sus valores crecientes nos dan,

64° 27′ 00″
27 30
27 30
28 00
28 30.

Ahora, el primero dista del último 1′ 30″=90″, por lo que ambos son despreciables; el segundo del cuarto 30″, por lo que son de aceptarse,

64° 27′ 30″
27 30
28 00,

cuyo promedio da 64° 27′ 40″, que sería el valor más plausible del ángulo.

A la verdad que este método es laborioso, pero en cambio es el único verdadero, y nos admira que antes no se haya propuesto.

Respecto á la exactitud necesaria en cada caso, pronto veremos cómo debe calcularse.

Este es el tiempo de hacer una observación, y es, que áun cuando la lectura de los dos vernieres ó micrómetros no difieran precisamente 180°, es decir, que no estén sobre un mismo diámetro, por descompostura ó imperfección del instrumento, deben, sin embargo, emplearse los dos, con tal que ambos tengan una posición fija.

En efecto, si los dos vernieres, fig. 24, distan exactamente 180°, al visar la señal A, suponiendo que el primero, el a, marque g grados y el b g' grados, el promedio será la primera lectura para el punto A; y si al visar el punto B, las lecturas de los mismos vernieres son respectivamente $g_{,}$ y $g_{,}'$,

la segunda señal tendrá la lectura $\frac{1}{2}(g_{,}+g_{,}')$. El ángulo $A\ CB$ de las señales será, según esto, $C=\frac{1}{2}(g+g')-\frac{1}{2}(g_{,}+g_{,}')$. Pero si se supone que el vernier b tiene el error x, resultará,

$$x=\tfrac{1}{2}(g+(g'+x))-\tfrac{1}{2}(g_{,}+(g_{,}'+x)),$$

ó hechas las operaciones,

$$x=\tfrac{1}{2}(g+g')-\tfrac{1}{2}(g_{,}+g_{,}');\ldots\ldots\ldots 18$$

resultado idéntico al anterior, á pesar del error x, según se había anunciado.

II. Hecha esta exposición, es necesario decir que hay instrumentos repetidores y no repetidores, llamándose repetidores aquellos en que se puede repetir un ángulo con distintas partes de su graduación, en virtud de ciertos mecanismos, y no repetidores á aquellos en que si se quiere repetir la medida de un ángulo, sólo puede hacerse con la misma parte de la graduación, salvo que se mueva el instrumento sobre su tripié. Se alega en favor de los primeros, que empleando partes distintas del limbo, se elimina en mucho la excentricidad que pueda tener la graduación, y que repitiendo la medida del ángulo, el promedio dará una exactitud igual á la aproximación del instrumento, dividida por el número de repeticiones; por ejemplo, si con un teodolito que dé minutos, directamente, y 30″, con el promedio de los dos vernieres se observa un ángulo n veces con distintas partes del círculo azimutal, la aproximación será $\frac{30''}{n}$; y se defiende á los no repetidores, diciendo, que sus mecanismos tienen menos piezas y movimientos, y que hay en consecuencia, más estabilidad en ellos, por lo cual, y siendo en nuestra época muy per-

fecto ya el arte de dividir los círculos, presentan más garantía que los repetidores.

Por nuestra parte no conocemos un estudio práctico y concienzudo para comparar los resultados de ambos sistemas, y mientras así no se resuelva esta competencia, daremos la preferencia á los repetidores, pues áun en los hechos más vulgares de la vida, á falta de exactitud, repetimos las medidas.

III. Todavía, se llaman "tránsitos" á los teodolitos que pueden girar sus anteojos 180° en altura y azimut, y en los que, como se verá en cátedra, se puede tomar una lectura con el anteojo á la derecha ó izquierda del limbo; y estos son instrumentos repetidores desde luego. En tal caso están el Tránsito Americano, el Taquímetro, el Cleps y varios otros.

Tales instrumentos son generalmente reputados como los mejores, pues operando en sus dos posiciones, es muy probable la casi total eliminación de los errores.

Respecto á la exactitud con que se puede medir un ángulo, depende en general de la percepción visual y del poder amplificador de los anteojos. Ya hemos visto que son 90″ el ángulo natural de la percepción visual; luego si es N el poder amplificador de un anteojo, el ángulo mínimo visual con él será $a = \frac{90''}{N}$. Sin embargo, la lectura de los limbos no corresponde á tal ángulo. Por ejemplo, supongamos á un lente un poder amplificador como 45, se tendrá $a = \frac{90''}{45} = 2''$, al paso que los vernieres dan minutos, ó 30″ el promedio de los dos, por lo que sería necesario repetir el ángulo 15 veces para tener $\frac{30}{15} = 2$, y armonizar la potencia del anteojo con la aproximación de los vernieres, en los cuales tal vez fuera útil más aproximación.

IV. Sabiendo ya medir los ángulos, diremos ahora, que por señales se colocan en los puntos que han de servir de vértices, fig. 25, un tripié formado por unos morillos, y sobre

él un haz de yerba; también una simple percha; ó en fin, cualquiera otra cosa por el estilo. El tamaño y grueso de estas señales es variable, con sus distancias á la estación; el poder de los anteojos; el de la vista del observador; la naturaleza y color del fondo en que se proyectan; la claridad de la atmósfera; y en una palabra, con todas las circunstancias que las rodean. Creemos pues inútil toda investigación teórica á ese respecto, que cada uno debe resolver prácticamente según sus elementos, recordando solamente que 90″ es el ángulo de la percepción de la vista natural, y que el rojo y el blanco son los colores que por lo general se destacan mejor á largas distancias. Mas en cambio de lo anterior, hay un detalle de importancia, sobre todo, en trabajos delicados.

V. Si se escoge una señal tal como una mojonera ó árbol grueso, y su distancia k á la estación no es tal que el ángulo α, fig. 26, bajo el cual se vea su radio, sea menor que la aproximación con que medimos los ángulos de la red, es necesario llevar en cuenta el grueso de la señal, como sigue, figura dicha. Si el sol no alumbra á la señal C y vemos sus dos generatrices verticales a y b tangentes á las líneas $A\ a$ y $A\ b$, se tomarán sus lecturas y el promedio corresponderá á la línea $A\ A'$ que pasa por el centro c de la señal; pero si el sol hiere á ésta, será necesario dirigir sólo la visual hacia él, $A\ a$; y calculando el ángulo $a\ A\ c$, añadirlo algebraicamente á la lectura. Esto se explica fácilmente con la figura, en la cual se ve que la parte $e\ b\ C\ a$ quedará en la obscuridad é invisible á grandes distancias, y no viéndose sino el segmento $a\ e$, sería un error dirigir visuales á e y a y tomar el promedio de sus indicaciones, pues éste no coincidiría con la línea $A\ A'$.

Respecto á esta corrección, la figura enseña que nos la dará la fórmula,

$$tan.\ \alpha = \frac{r}{K} \quad \ldots\ldots\ldots 19$$

pudiéndose tomar en muchos casos, $\alpha = \frac{r}{K\ sen.\ 1''}$ para facilitar el cálculo.

32. Para concluir, creemos útil manifestar que cuando en un círculo graduado de 0 á 360, que es el caso más general, al medir un ángulo tal como *C o D*, fig. 27, uno de los vernieres pasa por el 0° al trasladar el anteojo de una á otra señal, de *C* á *D* por ejemplo, en cuyo caso el vernier *A* pasa por 360 para ir á *A'*, que supondremos 10°, más allá del 0, se deberá tomar, para *C* 0 *D*=0,

$$0=\tfrac{1}{2}(g+g')-\tfrac{1}{2}(g_{,}+g_{,}')\pm 180°\ldots\ldots\ldots 20.$$

En efecto, según la figura, al visar el punto *C* los vernieres dan,

$$\begin{array}{lr} \text{Vernier } A\ldots\ldots\ \ldots\ldots g & =315° \\ \text{,, }\quad B\ldots\ldots\ldots\ldots g' & =135 \\ \hline & 450 \\ \tfrac{1}{2}(g+g) & =225° \end{array}$$

y al visar el punto *D*, suponiendo que el vernier *A* quede en *A'*, 10° más allá del 0, que es el mismo 360,

$$\begin{array}{lr} \text{Vernier } A'\ldots\ldots\ldots\ldots g_{,} & =10 \\ g_{,}' & =190 \\ \hline & 200 \\ \tfrac{1}{2}(g_{,}+g_{,}') & =100 \end{array}$$

Según esto resultaría, por la fórmula 15 de la página 47,

$$\begin{array}{lr} \tfrac{1}{2}(g+g) & =225° \\ \tfrac{1}{2}(g_{,}+g_{,}') & =100 \\ \hline & 0=125°\ldots\ldots(3)\ldots\ldots A \end{array}$$

y basta la inspección de la figura para comprender el absurdo que ello entraña; el cual consiste en que, dado el movimiento del anteojo y el sentido de la graduación, en la figura de ejemplo, todas las lecturas deben crecer al pasar á *D*, siendo así que *g* salta de 360 á 0 al pasar por él. Mas esta dimi-

nución ó retroceso sólo es aparente, pues por g debemos tomar 360+10=370, con lo cual resulta,

$$\begin{array}{lr} \text{Vernier } A' \ldots\ldots\ldots\ldots g_{,} & =370 \\ \text{,,} \quad B' \ldots\ldots\ldots\ldots g_{,}' & =190 \\ \hline & 560 \\ \frac{1}{2}(g_{,}+g_{,}') & =280 \end{array}$$

y entónces,

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}(g_{,}+g_{,}')=280 \\ -\frac{1}{2}(g+g'=225 \\ \hline 0= \ 55° \ldots\ldots (4) \ldots\ldots B \end{array}$$

lo que es en efecto la realidad.

Comparando ahora los valores A y B de 0, se ve que existe la relación 180°—125°=55°; esto es, el valor A es suplementario del B, con lo cual se demuestra la fórmula 20. Por lo demás, este retroceso de la lectura de uno de los vernieres no tiene peligro sino cuando el ángulo medido es muy próximo á 180° ó 90°, pues fuera de ahí, á la simple vista se descubre el error.

Es muy fácil descubrir este error ó paso por 0 de un vernier, pues como debe distar del otro 180°, deben ser iguales las diferencias de sus lecturas, salvo cuando ha ocurrido el paso, según se ve por los valores primitivos de A y A' de nuestro ejemplo, en donde se tiene: vernier A.........g=315°; vernier A'.........g=10°, de donde, $g—g'$=315°, en lugar de 55°. Como aún quedará vaguedad si hemos de sumar ó restar 180° de $\frac{1}{2}(g+g')—\frac{1}{2}(g_{,}+g_{,}')$, nótese que las indicaciones del segundo vernier resolverán la duda, pues él no pasará por el 0, puesto que no se miden ángulos mayores de 180°, sino deducidos de la resta á 360 del medido menor que 180°. Por tanto, la diferencia entre las dos lecturas del vernier que no pase por 0, nos dará el valor próximo del ángulo, lo cual será un indicio de si $\frac{1}{2}(g+g')—\frac{1}{2}(g_{,}+g')$, se suma ó resta á 180°. Así en nuestro ejemplo se tiene

$$g_{,}'=190$$
$$g_{,}=135$$
$$g_{,}'-g_{,}=55°$$

y para llegar á un resultado análogo, vemos que el valor *A* de 0 se debe restar de 180°.

Para aplicar estas reglas, los vernieres tienen, por lo regular, grabadas las letras *A* y *B*, para comparar sus respectivas lecturas entre las dos señales observadas.

Respecto á signos, se habrá notado que hemos restado indiferentemente unos de otros los valores angulares, lo cual se explica, porque si bien el círculo azimutal tiene un origen, no sucede lo mismo entre las señales, pues no se recordará que hayamos establecido nada sobre el particular; y más aún, todo lo contrario, se ha prescrito que para eliminar los efectos de excentricidad que la graduación pueda tener, se debe cambiar el 0 del limbo azimutal, para medir el ángulo con diversos arcos de su graduación, de lo que resulta un origen variable á cada paso. Así es como los ángulos entre las señales no pueden en ningún caso tener signos negativos, y por lo tanto, las lecturas deben combinarse de modo que no resulten sino ángulos positivos, para lo cual se restarán indefectiblemente las menores de las mayores.

De lo anterior se desprende que cuando sea necesario medir un ángulo próximo á 180°, mejor que corregir el paso por 0, será evitarlo, si los vernieres lo permiten, porque si sus lecturas no pueden hacerse sin grande aproximación, al consultarlos para ver si los 180° deben ser sustraendo ó minuendo, la discordancia debida á su poca exactitud puede engañarnos. Será, según esto, necesario ver á priori qué vernier va á pasar por 0, y á su paso sumarle 360; lo cual no se propone como regla general, por ser frecuente ese paso y ser más fácil tomar el suplemento al resultado, cuando á la simple vista se descubre el absurdo, teniendo cuidado, sin embargo, de consultar los vernieres cuando los ángulos sean próximos á 180° ó 90°, prescripción fácil de comprender.

33.—REPETICIÓN DE LOS ÁNGULOS.—Se ha visto en el párrafo 8 que la influencia de un error no depende sólo de su magnitud, sino también de la del elemento que lo contiene, y ahora es fácil ver de un modo notable la verdad de semejante fenómeno.

En efecto, en la fórmula 3 de la introducción á la Topografía,

$$da = \frac{sen.\ A}{sen.\ B}\, db + a\ cot.\ A\, d\, A - a\ cot.\ B\, d\, A,$$

los términos $\frac{sen.\ A}{sen.\ B}\, db;\ a\ cot.\ A\ d\ A$ y $a\ cot.\ B\ d\ A$, representan la influencia de los errores db, $d\ A$ y $d\ B$, pues antes se supuso $d\ A = d\ B$.

Pues bien, ahora es oportuno observar:

1º Que el error db se propaga según la relación $\frac{sen.\ A}{sen.\ B}$, por lo que se ve que en triángulos medianamente conformados, será pequeña, hasta ser la unidad en el equilátero, en donde se tendrá $da = db$.

Este error es pues indestructible, pero en cambio ni se propaga mucho ni menos aún es grande; no es pues peligroso, midiendo las bases con cuidado, y

2º La forma $a\ cot.\ A\ d\ A$ del error angular, manifiesta una influencia enorme de estos errores, y tanto mayor cuanto más pequeños son los ángulos, pues para $A = o$, resulta $cot.\ A = \infty$.

Tomemos $a = 1$, $d\ A = 10''$ y $A = 60°$, $50°$, $40°$, $30°$, $20°$, $10°$ y $0°$, y calculemos en abstracto la fórmula del error e,

$$e = cot.\ A\ d\ A$$

se tiene:

$A=$	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°.
$e=$	6	8	12	17	27	57	∞.

Vemos, pues, que el error angular se destruye con la forma equilátera, pero que como esa forma es imposible que sea

siempre aplicable rigurosamente, el error es tanto más desastroso cuanto más nos apartemos de ella; por esto nosotros proponemos que sólo por excepción se acepten ángulos menores de 40°, en que ya la influencia del error es doble que en el de 60°.

Fácil es ahora comprender que la clave para obtener buen éxito en los trabajos topográficos, está en la acertada medida de los ángulos.

Para estudiarla, notemos que el error

$$e = cot.\ A\ d\ A,$$

para $A=90$, se reduce á

$$e=0;$$

lo cual indica que el ángulo más fácil de medir bien es el recto; mas como en tal caso los otros dos de los tres de un triángulo serán agudos, resultaría el triángulo más erróneo siendo rectángulo que equilátero. Así, puesto que el ángulo de 60 es en resumen en el que menos influencia tiene un error; en el conjunto de la red, debe tomarse como tipo para averiguar, dado el principio de la repetición de las medidas, cuántas veces debe repetirse otro cualquiera menor de 60, si éste se repite n veces; esto con el fin de que todos los ángulos merezcan próximamente igual fe. A la verdad que es difícil ver claro en este asunto, como en todo aquel en que el hombre pretende la verdad absoluta; así, pues, ponga cada uno algo de su parte, y con buena voluntad supla nuestra incoherencia en lo anterior y lo que sigue.

Aceptado lo anterior, nótese que para que por la repetición dos ángulos merezcan igual fe, el número de sus repeticiones debe ser proporcional á la influencia nociva que en vista de sus valores tiene el error e con que se midan. Siendo, pues, el ángulo tipo en Topografía de 60°, vemos que, por la tabla anterior, si la influencia de un error en él es como 1, en los de

50, 40, 30, 20, 10 y 0

será como...........1,3, 2, 3, 4,5, 9,5 ∞.

Luego, si en el de 60° basta repetir el ángulo n veces, en los de

50, 40, 30, 20, 10 y 0

sería necesario 1,3n, 2n, 3n, 4,5n, 9,5n, ∞ veces.

Por ejemplo, si un goniómetro da un 1′ de aproximación y se quieren los ángulos con la de 20″, que se supondrá para el ángulo de 60°, serán necesarias para él tres repeticiones, pues se tiene $\frac{1'}{3}=\frac{60''}{3}=20''$; y entonces las repeticiones para los ángulos de 50, 40,......... serán 3,9 ó 4; 6; 9; 13,5 ó 14; 28,5 ó 29; ∞.

Respecto al ángulo mayor de 60°, claro es que de sobra tendrá con tres repeticiones, y áun con dos, con tal que sean en posiciones inversas del instrumento.

Para las aplicaciones en trabajos delicados, hemos formado la tabla siguiente de grado en grado, y de 60° á 30°, y siendo n el número de repeticiones calculadas para los 60°, como á su tiempo enseñaremos en el capítulo siguiente.

ÁNGULOS.	REPETICIONES.
60°	n
59	1,04 n
58	1,08 n
57	1,13 n
56	1,17 n
55	1,21 n
54	1,26 n
53	1,31 n
52	1,36 n
51	1,40 n
50	1,46 n

ÁNGULOS.	REPETICIONES.
49°	1,51 n
48	1,56 n
47	1,62 n
46	1,68 n
45	1,73 n
44	1,79 n
43	1,86 n
42	1,93 n
41	2,00 n
40	2,07 n
39	2,14 n
38	2,22 n
37	2,30 n
36	2,39 n
35	2,48 n
34	2,57 n
33	2,64 n
32	2,77 n
31	2,88 n
30	3,01 n

No será por demás dar unos ejemplos de aplicación:

Supongamos un trabajo en que se calculen necesarios 5″ de aproximación, dando el instrumento 30″ se tendrá......... $n=\frac{30''}{5''}=6$.

Al medir el primer ángulo vemos que tiene, por ejemplo, 47° 17′ 30″, ó sea 47° en números redondos.

Pues para 47 se tiene 1,62 n, ó $1{,}62\times 6=9{,}72$; luego lo repetiremos 10 veces.

Pasando á otro vértice se halla en números redondos, que su ángulo es de 37°. Para 37 la tabla da 2,30 n, ó $2{,}30\times 6=13{,}80$; luego lo repetiremos 14 veces.

Para otro en que se tuviera 54 grados, se hallaría 1,26 n ó $1,26\times 6=7,56$; ú ocho repeticiones.

Por lo demás, y según el párrafo 29, siempre debe repetirse un ángulo en número par, $\frac{1}{2}\, n$ en la posición directa y $\frac{1}{2}\, n$ en la inversa.

Comprendido esto y recordando lo dicho en la introducción general sobre el número de repeticiones necesarias en una medida que se busque, fácil es admitir que se pueden presentar dos casos: ó la aproximación del goniómetro es mayor de la necesaria, ó es menor.

Si mayor, se repetirá la medida del ángulo hasta que cuando menos la mitad concuerde dentro de esa aproximación; pero si es menor, hasta que se tenga $\frac{m}{m'}>\frac{e'}{e}$, según el párrafo 3 de la referida introducción.

Por ejempo, si se necesitan 40″ de exactitud y el goniómetro da 30″, bastará repetir hasta que se tenga $m=m'$, como mínimo, y dentro de 40″ como concordancia; pero si se necesitan 8″ y el instrumento da 30″, como se tiene $\frac{30''}{8''}=4$, en números redondos, se deberá repetir hasta obtener......... $m=4\ m'$ como mínimo, y dentro de 30″ como concordancia.

Creemos que los hombres de conciencia aceptarán las conclusiones anteriores por más que en la práctica requieran habilidad, y á falta de esto paciencia; pues no vemos otro medio de suplir, hasta hoy al menos, la exactitud que falta á nuestros sentidos, métodos é instrumentos. Así, pues, á estos hombres de conciencia nos dirigimos para aceptar sus objeciones razonadas, puesto que el negligente, inhábil ó ignorante siempre ha de encontrar nímia toda teoría que pida trabajo, inteligencia y atención.

Para concluir este capítulo, nótese que de la fórmula

$$e=cot.\ A\ d\ A,$$

se deduce que, en trabajos muy exactos, habrá un ángulo mínimo como límite de las medidas angulares.

En efecto, la práctica ha enseñado que la mayor exactitud con que un buen topógrafo puede medir sus ángulos, con los mejores instrumentos y en las condiciones más favorables, es de 5″. Luego, si es e la exactitud que pide un trabajo delicado, se tendrá,

$$cot.\ A = \frac{e}{5} \ldots\ldots\ldots 21.$$

Claro es, pues, que dentro de e será ilusoria la exactitud en todo ángulo menor que el calculado por esta fórmula, puesto que si acepta $A' < A$, resultará una influencia del error $e' > e$. En consecuencia, asignado e para un trabajo dado, debe consultarse la fórmula 21 para calcular el ángulo mínimo aceptable en la triangulación.

Como se ha dicho, la fórmula 21 supone habilidad, buenos instrumentos y condiciones favorables en las observaciones; mas como es difícil reunir siempre todos esos elementos, ó sea, medir un ángulo con 5″ de aproximación, lo más acertado es que se busque prácticamente para un individuo y un instrumento dados, su mayor exactitud, midiendo los tres ángulos de un triángulo equilátero, y tomando para el error del goniómetro, la tercera parte de la diferencia á 180° de la suma de los tres ángulos. Por lo demás, reflexiónese que la aproximación aumentará, hasta ciertos límites, con el número de repeticiones de los ángulos, y que así, es conveniente formar cada uno á su goniómetro, una tabla en que conste la aproximación correspondiente á cada número n de repeticiones, con cuyo dato podrá entrarse á la tabla anterior.

Para aquellos que puedan responder de 5″ en la medida de sus ángulos, puede servir la tabla siguiente, dada por la fórmula 21:

$e=$ 5″	....	$A=$45
10	....	26
15	....	18
20	....	14
25	....	11
30	....	9
40	....	7
50	....	5
60	....	4

Los demás, pueden formar su tabla particular por la fórmula

$$cot.\ A=\frac{e}{i},$$

en la que i sea la aproximación de que puedan responder con su instrumento empleado. Entretanto reflexiónese que mientras menor sea i más pequeño será A, lo que equivale á decir que se tendrá más libertad en la elección de los vértices. Es, pues, cuestión capital para el topógrafo, enseñarse á medir los ángulos con exactitud y rapidez.

Por la tabla anterior y la primera, para calcular el número de repeticiones necesarias á cada ángulo, se ve que es conveniente no formar ángulos muy agudos, sino en último caso, pues aunque por la segunda tabla puedan admitirse, la primera indicaría tantas repeticiones, que sería muy enfadosa su determinación.

En efecto, supongamos en un trabajo $e=40''$. Por la tabla anterior, el ángulo límite sería de 7°; pero el número de repeticiones para él resultaría ser 17 n, siendo n el número de repeticiones para el ángulo de 60°. Así, pues, si para este último se tuviera, por ejemplo, $n=3$, nos quedaría para el de 7°, $N=17\,n=51$ repeticiones, y esto de resultados aceptables, es decir, dentro de 4″,9, pues á menor ángulo sabemos debe darse mayor exactitud según la fórmula $i=\frac{e}{cot.\ A}$, por lo que el número total de observaciones sería mucho mayor.

En vista de todo lo anterior, proponemos que se procure formar ángulos mayores de 45°, y que sólo en último caso y urgidos por la más imperiosa necesidad, se admitan hasta de 30°, desechando siempre los menores para todo trabajo ya medianamente exacto. En tal caso, bastará la tabla primera de este párrafo.

Sin embargo, para otro ángulo menor, cuando sea materialmente imposible excusarlo, como puede suceder en el levantamiento de un archipiélago, el número de repeticiones se hallará por la fórmula

$$N=\frac{cot.\ A}{cot.\ 60^\circ}n=(0,239)\,n\,cot.\ A\ldots\ldots\ldots 22,$$

siendo n el número de repeticiones necesarias para el ángulo de 60°, y (0,239) el logaritmo de $\frac{1}{cot.\ 60^\circ}$. Respecto á n, ya hemos dicho cómo se determina; aunque también se acepta que si es a la aproximación de un instrumento y e la exactitud necesaria á un trabajo, exactitud que pronto enseñaremos á calcular, se tendrá $n=\frac{a}{e}$. Por nuestra parte, preferimos determinar á n prácticamente.

Por lo demás, no se pierda de vista que hemos entrado en estos estudios para llegar á los límites superiores de la Topografía, y en cuyos límites ya tiene muchos puntos de contacto con la Geodesia, en la cual creemos indispensable la aplicación de la teoría desarrollada, empleando la fórmula

$$cot.\ A=\frac{e}{d\,A}=\frac{1''}{1''}=1;$$

es decir, reusando en absoluto ángulos menores de 45°, salvo en casos de imposibilidad física. Así, pues, bajo tal exactitud, cada uno podrá descender hasta donde lo pidan sus circunstancias, según lo hemos repetido antes.

CAPITULO III.

CÁLCULO DE LOS TRIÁNGULOS.

34. Para dar una idea del croquis y registro que se forman á medida que avanzan los trabajos, supongamos la fig. 28 y el registro siguiente:

*Registro de la triangulación de......b=A B=6847*m·.

	$A=$ 67° 18′ 37″,8		$B=$
	$B=$ 54 22 30 ,0		$D=$
A B C.	$C=$ 58 18 02 ,0	*B D E*	$E=$
	179° 59′ 10″,0		
	180		
	$e=$............50″,0+		

Como se habrá notado en el registro anterior, se hace la suma de los tres ángulos de cada triángulo y se resta de 180, y llamando *e* á la diferencia ó error, se asienta allí mismo. Pues bien, respecto á efectuar en el mismo registro esas operaciones, lo recomendamos, porque en caso de equivocación fácil es recalcular, sin temor de extravío de papeles; y en cuanto á las diferencias á 180, tienen por objeto aplicarlas como corrección á los ángulos, para reducir su suma á la teórica de 180, de los triángulos planos.

35.—Respecto á la distribución de *e*, se hace por partes iguales; y como tal vez reflexione el alumno que tal distribución es arbitraria, le manifestaremos que en absoluto tiene razón, si tal piensa. Pero si se reflexiona que por el método de observación, indicado en el capítulo anterior, todos los ángulos merecerán igual confianza, esperamos que acepte que dada nuestra impotencia, lo menos arbitrario es atribuir igual error á todos los ángulos.

De acuerdo con todos los que de este problema se han ocupado, creemos que muy probablemente, jamás podrá resol-

verse de un modo absoluto, pues entran en él multitud de factores variables con mil fenómenos, como son: defectos de construcción de los instrumentos; dislocación de sus piezas á causa del uso; sus dilataciones por el calor; la refracción de la luz; el espejismo en las regiones cálidas; la dirección del viento, el cual produce una desviación lateral; y en fin, hasta el estado fisiológico del individuo, variable con los fenómenos meteorológicos y diferente no sólo para diversas personas, sino áun para una misma y en el mismo día, en virtud de lo cual, su vista y tacto en los últimos límites de las apreciaciones le dan distintas indicaciones á cada paso.

Respecto á la distribución del error, dan los autores como segunda regla, que se reduzca á 360° la suma de los ángulos al rededor de un punto, y que para que la primera corrección no se altere, la corrección del ángulo en cada triángulo del vértice común, se aplique con signo contrario y por mitad á los otros dos ángulos de cada triángulo. Creemos que si arbitraria es la primera corrección, mucho más lo es esta segunda, pues por la vana esperanza de una perfección mayor, nos exponemos á mayores errores. Nos parece, pues, más digno de la ciencia tener la seguridad de que existen errores pequeños, que no exponerse á otros mayores por pretender destruirlos, sin prueba de éxito.

De tal modo nos parece fundado lo anterior, que proponemos no se haga á los triángulos corrección alguna.

Sólo hemos, pues, dado á conocer las anteriores, por no tener derecho á imponer nuestra opinión sobre un punto que no podemos demostrar con evidencia absoluta.

36.—Pasemos ahora al cálculo material de los triángulos. Preparados los triángulos, distribuyendo su exceso en cada uno, por partes iguales entre sus tres ángulos, si no se acepta nuestra opinión de no corregirlos, es conveniente hacer todos los cálculos en un solo cuaderno y conservando las diferencias logarítmicas, porque de ese modo, si posteriormente se descubre un error, es muy fácil corregirlo. Como ejemplo, véase el cálculo siguiente, hecho con los datos del registro

dado al principio y la aplicación de la fórmula general........
$a = b\frac{sen.\ A}{sen.\ B}$.

Triángulo A B C.

b....	+3,8355003			+3,8355003	
sen. B....	+9,9650283	—8,8	*sen. A*....	+9,9100237	—15,1
	40	4,5		101	6,7
	3,8005326	440		3,7455341	1057
		352			906
sen. C....	—9,9298462	—13,0	*sen. C*....	—9,9298578	
	116	8,9			
A C.........	3,8706748	117	*B C*......	3,8156763	
	31	104		07	
	17			56	
A C=7424,63			*B C*=6541,48		

Y así se continuaría con los demás triángulos. Respecto á la explicación de las operaciones, las creemos inútiles para estudiantes de cuarto año, y más, cuando que, si alguna duda ocurre, se resolverá en clase oralmente. Así, pues, sólo hemos hecho el cálculo anterior para dar las explicaciones siguientes:

A C se calculó con $B=54°\ 22'\ 46'',7$ y $C=58°\ 18'\ 18'',9$. Pues bien, si hechos los cálculos se descubre un error de 3″, por ejemplo, para los ángulos *B* y *C*, como sus senos entran en el cálculo por la diferencia de sus logaritmos, para la corrección bastará tomar la diferencia de sus diferencias logarítmicas, para seno de *B* y seno de *C*, y multiplicando el resultado por 3, buscar en la tabla de los números el correspondiente á este logaritmo, añadiéndolo á *A C*. Hagamos estas operaciones en el supuesto de que *B* y *C* tengan los 3″ de error referidos: las diferencias logarítmicas para *sen. B* y *sen. C* fueron, en el cálculo anterior y por 1″, 8,8 y 13,0; luego tendremos (8,8—13,0) 3= —4,2×3= —12,6; y como el loga-

ritmo de $A\ C$ es 3,8706748, yendo á las tablas de los números, la columna de aproximación correspondiente á este logaritmo tiene por diferencia en su cabeza 185 en la página 28, y á la diferencia logarítmica 13 que puede tomarse por 12,6 del resultado anterior, corresponde el número 1 que añadiremos con su signo — al resultado del cálculo anterior, ó sea á 742463, valor de $A\ C$, que entonces vendrá á ser 742463—1=742462; y en fin, en atención á la característica de $A\ C$, en el cálculo que estudiamos, el valor correcto será $A\ C$=7424,$^{m.}$62.

Ya se deja ver cuán fácil es una corrección cuando se han conservado los cálculos primitivos, por lo que creemos que baste el ejemplo dado.

Mas también puede ocurrir un error en la base y claro es que, como lo demuestra la figura 29, una vez hechas las correcciones angulares, el error y en el lado a, á causa del x en la base b, será dado por la ecuación,

$$y=\frac{x}{b}a\ldots\ldots\ldots 23.$$

Calculada, entonces, la relación constante $\frac{x}{b}$, bastará irla multiplicando por los lados, para obtener sus correcciones. Así, supongamos que en vez de b=6847, se debió entrar á los cálculos con b=6857; pues bien, se tendrá x=10, y luego, $\frac{x}{b}$=0,0015, y la corrección de $A\ C$ será 0,0015×74=11,$^{m.}$1, y quedará $A\ C$=7435,73; y nótese que bastará multiplicar la constante $\frac{x}{b}$ de la corrección, sólo por las dos primeras cifras del lado incorrecto, pues generalmente y sólo expresará diez milésimos de los lados.

Para concluir esta parte haremos observar que los cálculos no siempre necesitarán de logaritmos de siete decimales, sino de tantas más una como cifras tengan los valores de los lados de los triángulos, pues como se puede comprender fácil-

mente por el estudio de las tablas logarítmicas, de las de Callet por ejemplo, á cada orden de unidades del sistema de numeración corresponde una decimal logarítmica. Por ejemplo, supongamos que se quiere el logaritmo del número 724, se tendrá:

Con cuatro decimales.	*Con siete decimales.*
724......2,8597	..................2,8597386.

Pues bien, claro es que el primer logaritmo será suficiente al cálculo, si no se quieren aproximar sino unidades, y que de este modo pueden abreviarse notablemente los cálculos, porque cuando la aproximación angular sea menor de 10″, es obvio que en las tablas de logaritmos podrán despreciarse las diferencias y tomar el logaritmo del seno más próximo al arco en 10″ enteros.

Este método de cálculo no debe dejar duda en el ánimo, puesto que se ha demostrado que la exactitud lineal es de 0,0001 *L;* y á la distancia *L*, 0,0001 *L* se ve bajo el ángulo de 20″. Luego, puesto que el error del método propuesto es en menos de 5″, resulta una exactitud angular cuádruple de la necesaria para armonizarla con la lineal. Así, pues, sólo en trabajos de primera clase será necesario interpolar por segundos, y ésto más por elegancia de las memorias, que por efectiva necesidad.

37.—Véamos ahora un problema reputado como el más importante de la Topografía, que es éste: ¿Qué relación existe entre la extensión de un terreno, la longitud de los lados de los triángulos, la aproximación con que se miden los ángulos y el error del último lado, para que ese error sea inapreciable á la escala del plano?

Para resolverlo, calculando todos los lados de la red por la fórmula $a=b\,\frac{sen.\ A}{sen.\ B}$, tendremos de un modo general, en el primero, segundo, tercero y n triángulos,

$$a = b\frac{sen.\ A}{sen.\ B};$$

$$a' = a\frac{sen.\ A'}{sen.\ B'};$$

„ = „ „

Sustituyendo ahora en la expresión del último lado el valor que en él entra del penúltimo, en este nuevo valor el del antepenúltimo, y así continuando tendremos, al n triángulo,

$$a_n = b\frac{sen.\ A\ sen.\ A' \ldots\ldots\ldots sen.\ A_n}{sen.\ B\ sen.\ B' \ldots\ldots\ldots sen.\ B_n} \ldots\ldots\ldots 24$$

Ahora, como por prescripción todos los ángulos de la red son de unos 60°, resulta que el cociente del coeficiente de b será muy próximo á $\frac{sen.^n\ A}{sen.^n\ B}$, pues si alguno de los ángulos del numerador en la expresión 24 es mayor ó menor de 60°, siempre habrá, por lo general, otro en el denominador que se le aproxime. Así, pues, si llamamos u al último lado, podemos poner, con la exactitud necesaria,

$$u = b\frac{sen.^n\ A}{sen.^n\ B}.$$

Pero puesto que tanto A como B son próximos á 60°, supongámoslos iguales é igual en ellos, pero con signo contrario, un error x, por ser este el caso más desfavorable, desde luego que con el mismo signo resultaría $u = b$, debiéndose tener $u - y = b$, siendo y el error lineal en u á causa del angular en la red. Con esto resulta, aceptando $u = b + y$,

$$b + y = b\frac{sen.^n\ (A + x)}{sen.^n\ (A - x)},$$

ó bien,

$$\frac{sen.\ (A + x)}{sen.\ (A - x)} = \sqrt[n]{1 + \frac{y}{b}} = \left(1 + \frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 + \frac{y}{nb} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{y^2}{b^2} \ldots\ldots\ldots;$$

pero como y siempre será muy pequeño con relación á b, puede despreciarse de la segunda potencia en adelante, con lo cual, desarrollando los senos, tomando por la pequeñez de x, $sen.\ x=x$ y $cos.\ x=1$; y despejando á x, en segundos, resulta,

$$x=\frac{tan.\ A}{2\,sen.\,1''}\cdot\frac{y}{n\,b}\ldots\ldots\ldots 25;$$

que con la condición $y=0{,}0001\,r$, siendo la escala $\frac{1}{r}$, nos da, calculando el logaritmo de la parte constante con $A=60°$, y con sólo tres cifras decimales, puesto que x en todos casos será pequeño,

$$x=(1{,}251)\frac{r}{n\ b}\ldots\ldots\ldots 26,$$

conociéndose á n y b por la inspección del croquis preliminar; hecho con la mira de que b, en general lado de los triángulos, tenga el mayor valor según la potencia del anteojo y los movimientos del suelo.

Esta fórmula, semejante á la de otros autores, aunque obtenida más directamente, permite la solución de cuatro problemas, pues con ella puede buscarse á x, r, n ó b. Pero su indicación más importante es la de que si por x se toma la aproximación con que se deben medir los ángulos, entonces vemos que mientras más triángulos se formen, menor será x y más difícil en consecuencia la medida de los ángulos, lo cual significa que se debe procurar que el terreno quede cubierto por el menor número de triángulos primarios.

38.—Sin embargo, el problema anterior no basta sino cuando se quiere conocer la topografía del terreno, como sus accidentes, movimientos, etc.; pero si lo que se busca es su superficie, fácil es comprender que bien pueden ser los errores inapreciables en el plano, y sin embargo entrañar grandes zonas de tierra que pasarán desapercibidas, siendo tanto mayores cuanto más lo sea r. Importa por tanto calcular á x en

unción de S, superficie del terreno, bajo la condición de que el error superficial sea menor que los gastos que se erogarían para obtener mayor exactitud, pues es lógico admitir, que si para llegar á una exactitud dada gastamos más de lo que valga la aproximación ganada, haremos una mala operación económica.

Para llegar al objeto, reflexionemos que si en la fórmula

$$x=\frac{tan.\ A}{2\ sen.\ 1''}\cdot\frac{y}{n\ b},$$

consideramos á $y=C\,c$, fig. 30, como el error lineal en $A\ C$ á causa del angular x al medir al ángulo B, el triángulo $B\,c\,C$ será la expresión del error superficial, originado por la aproximación x. Después, suponiendo el caso más desfavorable, en que x forme en cada triángulo los dos pequeños $A\ C\,c'$ y $B\ C\,c$ que aumenten ó disminuyan á la vez la superficie, se ve que la integral de esos pequeños triángulos, en toda la red, tiene por valor muy aproximado $n\ b\ y$. Para tener este valor en la fórmula citada, bien podemos poner,

$$x=\frac{tan.\ A}{2\ sen.\ 1''}\cdot\frac{n\ b\ y}{n^2\ b^2}.$$

Ahora, $n\ b\ y$ no es sino el error superficial ΔS con que se debe medir el terreno; y á la vez la superficie de éste será muy próximamente $S=\frac{1}{2}\ n\ b^2$, según lo cual nos quedará,

$$x=\frac{tan.\ A}{2\ sen.\ 1''}\cdot\frac{\Delta S}{2\ n\ S},$$

ó bien con una sola constante, tomando $A=60°$,

$$x=(4{,}951)\ \frac{\Delta S}{n\ S}\text{.........}27$$

que nos dará á x tan luego como sepamos fijar á ΔS. Para ello, notemos que mientras más exacto sea un levantamiento, más dilatado será, y que así, si llamamos h á los honorarios

del ingeniero, gastos de mozos, etc., estos honorarios y el costo C del terreno valuado aproximadamente, deben ser proporcionales á ΔS y S, si no se quiere gastar más de lo que valga el terreno ΔS ganado, ó menos, según el caso. Por esto proponemos la fórmula

$$x=(4{,}951)\frac{h}{n\,C}\ldots\ldots\ldots 28$$

en la cual habrá que fijar á h, según el caso.

Llegados á este terreno nos permitimos proponer, que puesto que la valuación de la superficie de un terreno no es en último resultado sino la de su valor, se tome por h, respecto de C, el tanto por ciento que se pague en los avalúos de propiedades rústicas.

Desarrollada la teoría y siendo los honorarios del ingeniero por lo general y en grandes propiedades, el 2 al millar, ó $h=0{,}002\ C$, tendremos,

$$x=\frac{266''}{n}\ldots\ldots\ldots 29$$

39.—Antes de concluir este capítulo, daremos á conocer el problema siguiente: "Si al fin de la triangulación se mide una segunda base de prueba y resulta diferente á la calculada, ¿cuál debe ser la corrección de los ángulos de la red, para que ambas bases, calculada y medida, sean iguales?"

Es evidente que este problema se puede resolver por la fórmula,

$$x=\frac{tan.\ A}{2\ sen.\ 1''}\cdot\frac{y}{n\ b},$$

en la cual, x será la corrección buscada de los ángulos; y, la diferencia entre las líneas calculada y medida; n, el número de triángulos de la red; y b, la base medida al principio de los trabajos.

Nosotros sólo damos á conocer este problema por constar en autores respetables, pero en nuestro concepto, no es sino

una puerilidad científica, pues no por tales composiciones un trabajo es más ó menos bueno. Y además, este problema se presta á que un charlatán nos presente como admirable el peor de los trabajos. Sin embargo, muy fácil es descubrir una superchería con la simple medida de uno cualquiera de los lados, bien directamente ó con una pequeña base auxiliar, como sigue.

Elegido un lado $C\,D$, fig. 31, se mide una base $A\,B$ y los ángulos α, β, γ y δ, con lo cual se tiene sucesivamente.

$$x=c\frac{sen.\ \gamma}{(sen.\ \alpha+\beta+\gamma)};\ b=c\frac{sen.\ (\gamma+\delta)}{sen.\ (\beta+\gamma+\delta)};$$

y

$$tan.\ \tfrac{1}{2}\,(C-D)=\frac{x-b}{x+b}tan.\ \tfrac{1}{2}\,(C+D)$$

con lo que se conocerán C y D y se puede calcular á $C\,D$.

A la verdad que hay un camino más breve que el anterior, pero éste tiene la ventaja de resolver todo el triángulo, y proporcionar luego la verificación

$$\alpha+C+D=180°.$$

En cuanto á la prueba material, debe hacerse con el mayor esmero, y luego, ver si la diferencia entre $C\,D$ y el valor que tiene en la triangulación, que se va á verificar, corresponde á la aproximación con que se nos dice se midieron los ángulos; además, bueno será calcular un segundo valor de $C\,D$ por los triángulos $A\,C\,B$ y $B\,C\,D$ y tomar el promedio de los dos resultados, pues en tales pruebas se debe proceder con suma conciencia.

40.—Finalmente, tal parece que la indicación de la fórmula 29 es demasiado liberal, pero sobre que x disminuye al aumentar n, nótese que en las aplicaciones de la Topografía, no por que se repita más ó menos veces la medida de un ángulo resultará en lo absoluto más ó menos exacto, pues la pequeñez de los limbos de los instrumentos, la inestabilidad

de éstos, el viento y otros muchos factores, entre ellos la economía, que pide procedimientos rápidos, hace que no se pueda tener seguridad de medir un ángulo sino con 5″ de aproximación, salvo en casos excepcionales en que se usen instrumentos muy superiores y se lleve á 1″.

Y siendo esto así, claro es que la fórmula que dé á x en función de n, no debe dar sino 5″, aun para el mayor valor de n. Según esto, nuestra fórmula 29 da con $x=10''$, doble de la exactitud general á que se puede llegar $n=26$, número de triángulos que difícilmente tendrá una red apoyada en una sola base.

Tales resultados parecen indicar que basta una lectura en un instrumento que dé minutos aun en el trabajo más delicado; pero recuérdese que se ha llegado á la fórmula citada, no por la condición de la exactitud absoluta, sino relativa. Además, aunque en un trabajo baste cierta exactitud analítica, en la práctica es necesario llevarla aún mucho más lejos. En efecto, calculada una aproximación, bastaría, cuando el eje del instrumento estuviera perfectamente vertical; perpendicular á él su limbo azimutal, con todo rigor; exactamente centrada su línea de colimación; nulas las excentricidades de su eje vertical y graduación, y ésta perfectamente trazada; y luego, el estado atmosférico, sin causa alguna perturbatriz, es decir, sin refracción, que altera la dirección de las visuales, sin calor que dilate el aparato, sin polvo que obstruya sus movimientos, sin viento que lo mueva; y en fin, perfectos los sentidos del ingeniero, y éste que sea tan hábil como inteligente topógrafo.

A pesar de las consideraciones anteriores, que parecen desalentar, es necesario fijarse en la amplitud de la fórmula 29, y recordar que no todas las causas de error mencionadas obrarán en igual sentido, sino que por el contrario, algunas se destruirán mutuamente; y en efecto, bastan cuatro ó seis repeticiones de la medida de un ángulo, entre dos individuos aun con elementos diferentes, para que lleguen á resultados muy concordantes. Por ejemplo, en un teodolito que dé mi-

nutos y el promedio de sus dos vernieres 30″, con cuatro observaciones en distintas posiciones del instrumento, se tendrían 7″,5 de aproximación. Pues bien, no podremos fiar en que esos 7″,5 sean de un modo absoluto la aproximación del ángulo, pero sí estaremos casi ciertos de que el error no pasará del doble, pues sería muy remoto que la mayor parte de las causas de error entrasen con el mismo signo. Se ve, pues, que siempre será fácil obtener la exactitud necesaria.

En virtud de todo lo anterior, proponemos que en una red de muchos triángulos se midan varias bases, una para cada 13, puesto que teóricamente bastaría para 26.

Finalmente, se deja comprender que nosotros nos hemos puesto en el caso del valor particular de las tierras; pero cuando se versan intereses científicos ú oficiales, en los que se pide gran exactitud sin preocuparse de los gastos, la cuestión cambia de aspecto, y no se empleará la fórmula 29 para calcular á x, sino la 25, eligiendo á y, n y b con entera libertad, y tomando los instsumentos que más garanticen á x, cuesten lo que cuesten; en cuyo caso no está un ingeniero particular obligado á trabajar con instrumentos comunes. En virtud de las consideraciones anteriores propondríamos, que calculada una aproximación angular x, se lleva al doble en la práctica, para tener en todos casos grandes probabilidades de éxito.

CAPITULO IV.

ORIENTACIÓN DE LA RED.

41.—Hasta aquí nos hemos ocupado en buscar los elementos analíticos para trazar un plano, esto es, una figura semejante á la del terreno, pero en la introducción se dijo que además es necesario poner en este plano la dirección de la meridiana, para conocer no sólo la posición de los objetos

entre sí, sino también con relación á los puntos cardinales, pudiendo sólo así formarnos de ellos una idea completa. Y claro es que se resolverá esta cuestión tan luego como se sepa el ángulo que la meridiana forma con un lado cualquiera de la red. Pues bien, á este ángulo se llama azimut, y á su cálculo, orientación de la red; que es la materia del presente capítulo.

Antes de entrar al cálculo del azimut diremos que generalmente se le representa por u; que se cuenta, fig. 32, del Norte al Oeste, Sur, Este hasta volver al Norte; que al decir azimut de la línea $A\ B$ ó simplemente azimut de $A\ B$, se entiende el azimut cuyo vértice está en A, y recíprocamente, si se dice azimut $B\ A$, se entiende el azimut cuyo vértice está en B; y en fin, que estos azimutes de los extremos de una línea, se llaman inversos el uno del otro, y los liga la relación

$$u' = u \pm 180° \quad \ldots\ldots\ldots 30$$

Aparte de todo esto, el azimut es magnético ó astronómico, siendo el primero el que proporciona directamente la brújula, y el último el que se refiere al meridiano astronómico. De éste nos vamos á ocupar principalmente, puesto que el primero es un dato instrumental.

Muchos métodos hay para calcular el azimut de una línea, pero sólo daremos los dos que siguen, pues los demás, reclaman conocimientos astronómicos, y además, son inaplicables con instrumentos topográficos, cuya exactitud no está en relación con ellos.

I. PRIMER MÉTODO.—*Proyecciones solares.*—Puesta horizontal una tabla rectangular de madera $A\ B$, fig. 33, y que lleva un estilo $C\ D$, normal á ella, con una lámina $D\ E$, próximamente normal á los rayos del sol S al pasar por el meridiano $C\ c$, y cuya lámina lleva un pequeño agujero para el paso de los rayos solares; se alínea el lado $A\ A'$ de la tabla con la línea Este-Oeste, á poco más ó menos.

Preparado así este sencillo aparato, como á las diez de la mañana, por ejemplo, se marca el punto a en que un rayo solar

hiera á la tabla *A B*. Después, á la hora correspondiente de la tarde, respecto al medio día, esto es, á las dos, se marca la segunda señal, *b*, y claro es que si se unen *a* y *b* y se traza *C c* perpendicular á *a b*, esa línea *C c* será la meridiana astronómica. Fácil es ver que con tan rudimental método, sólo se tendrá la meridiana con una tosca aproximación, y más si se tiene en cuenta que el movimiento del sol no es uniforme, ni marchan con él los relojes comunes. No creemos, pues, que valga la pena buscarle más correcciones, que trazar varias líneas análogas á las *a b* y *C c*, y tomar su promedio, para los trabajos corrientes.

II. Segundo método.—*Alturas iguales de una estrella.*—Se habrá visto en Cosmografía, que el movimiento de las estrellas es tan uniforme, que en nuestro caso podemos suponerlo perfecto en tal sentido. Luego, si por la noche dirigimos el anteojo de un teodolito á una estrella antes de su culminación, y sin mover el referido anteojo en altura, leemos su indicación azimutal; y pasado el tránsito de la estrella, la volvemos á observar cuando tenga igual altura, y leemos otra vez la graduación azimutal; es evidente que el promedio de las dos lecturas, antes y después del paso, pertenecerá á la indicación meridiana. El promedio de varias observaciones nos dará con este método, un valor mucho más exacto que por el solar, y así, vale la pena entrar en algunos detalles.

Dirigido el anteojo á una estrella, fig. 34, luego que aparece en el campo del anteojo que se alumbra con una lámpara para ver la retícula, se pone antes de su paso por el hilo vertical, como en *a*, que representa el campo del anteojo con su retícula, y se aprietan suavemente los tornillos de presión de los círculos vertical y azimutal. Hecho esto, y suponiendo que la estrella se mueve de izquierda á derecha y subiendo, se sigue en su movimiento con sólo el tornillo tangencial ó de aproximación, del círculo azimutal, hasta ponerla en el hilo vertical de la retícula, en cuyo hilo se le mantiene hasta que corte al horizontal, en *u*; en cuyo momento se detiene el movimiento del tornillo de aproximación y se

lee el círculo azimutal. Después de la culminación, se aguarda á que la estrella, sin mover el anteojo en altura y sólo azimutalmente, éntre al campo, y se repita igual operación. Entonces, si las lecturas azimutales fueron g y g', promedio cada una de las dos lecturas de los vernieres en cada observación, la graduación meridiana será,

$$G=\frac{g+g'}{2}.........31.$$

Ahora, en vez de una, pueden hacerse varias observaciones, como sigue: unas dos horas antes de la culminación de la estrella, se toma de ella su altura y azimut, y se continúan tomando estos datos, que se anotan, de diez en diez minutos de tiempo, por ejemplo, hasta que los cambios en altura sean iguales á la aproximación del instrumento, lo cual sucederá cerca del tránsito, pues en él los cambios en altura son pequeños, al grado de ser inapreciables con un instrumento topográfico, lo cual se nota por la irregularidad de sus indicaciones. Verificado el tránsito, se pone el anteojo en la última altura y se aguarda así el paso de la estrella, leyendo entonces el círculo azimutal. Luego se pone el referido anteojo en la penúltima altura de la serie antes del tránsito, y se toma otra lectura azimutal, continuando así hasta volver á una altura, última de la segunda serie, igual á la primera, de la primera serie de observaciones. Hecho esto, es claro que combinando dos á dos las lecturas azimutales correspondientes á iguales alturas, se tendrán tantos resultados, como observaciones se hicieron en cada serie. Despreciando, pues, aquellos que discrepen en más de la aproximación del instrumento, el promedio de los restantes dará á uno con la exactitud necesaria en Topografía, y más si para eliminar algún error de colimación ú otro que pueda existir, se observa en varias posiciones del instrumento, y estrellas que culminen á ambos lados del zenit. Así aplicado este método y con cuidado, será el mejor, de Topografía.

Finalmente, dicho queda que este método puede emplearse con el sol, lo cual puede ser útil cuando las noches de traba-

jo sean nubladas. En tal caso, no hay que olvidar el uso de los heleoscopios, para defender la vista; ni que se debe poner el limbo del sol tangente á los hilos horizontal y vertical de la retícula, y á lados opuestos del hilo vertical en la mañana y en la tarde, por razones fáciles de comprender. Por lo demás, siempre será más exacta la observación de estrellas.

42.—Dados á conocer los métodos para conocer la dirección de la meridiana, veamos cómo se debe proceder para calcular el azimut u, fig. 35, de un lado $A\ B$ de la red.

Siendo $A\ B$ un lado de la triangulación; A la estación en que se calcula el azimut de $A\ B$; A' un astro; u' su azimut en una observación cualquiera; P el polo; y $A\ A'$ la dirección que la estrella tiene en el momento de la observación con $A\ B$, se ve que resulta,

$$u=u'+\alpha\ldots\ldots\ldots 32.$$

Esto indica lo que debe hacerse, y es lo siguiente:

Sobre el lado $A\ B$ de la red se coloca por la noche, una señal luminosa B, lo más pequeña y retirada que sea posible, nada más para que no haya vaguedad al poner sobre ella la retícula del anteojo, y puesta ya, se lee no sólo la graduación del limbo azimutal correspondiente á A', sino que leida ésta, se lleva el anteojo á B y se vuelve á leer el referido círculo azimutal. Entonces, es evidente que calculando u' y medido α, el azimut u de la línea $A\ B$ será,

$$u_{,}=u'+\alpha.$$

Por lo demás, dada la figura, éste será el suplemento del azimut á 360; y así el azimut será

$$u=360-u_{,}.$$

43.—Cuando quiera dejarse trazada la meridiana sobre el terreno, puede procederse como sigue:

Medido el ángulo $u_{,}$ como antes se dijo, á partir de B se toma ese ángulo en $B\ A\ P$, fig. 35; pero como en una sola

observación no es posible que quede C en su posición exacta, se pone en ese punto C una señal y luego se repite varias veces la medida del ángulo $B\ A\ \hat{P}$. Después, es evidente que si es α el resultado, $u_{,}-\alpha$ será el error de C para coincidir con P. Luego, levantando en C la perpendicular $C\ c$ á $A\ P$, con $A\ C$ que se mide y $P\ A\ \hat{C}=u_{,}-\alpha$, se puede calcular á $C\ c$ por la relación, $tan.\ (u_{,}-\alpha)=\frac{C\ c}{A\ C}$ que encontraremos por el triángulo $A\ C c$.

Bastará, pues, medir perfectamente á $C\ c$ y poner en c una señal, que con A marcará la dirección de la meridiana. Fácil es comprender que $A\ C$ debe ser lo más grande posible para eliminar causas de error. Hallado el punto c, si puesto el anteojo sobre $A\ c$ y moviéndolo verticalmente se descubre una peña, mojonera ó cualquiera otro objeto estable y visible, bien se puede mandar trazar sobre él un punto, con el cual y el vértice A, se tendrá en cualquier tiempo una señal que indique la dirección de la meridiana.

Finalmente, debemos decir que para alumbrar la retícula del anteojo, debe emplearse una luz reflejada á su interior por un espejo, si es necesario, de tal modo puesto que no intercepte la visión.

Algunos instrumentos tienen lo necesario para este trabajo, pero de todos modos siempre será fácil alumbrar con una lámpara pequeña puesta hácia el objetivo.

CAPITULO V.

APLICACIÓN Á LA TOPOGRAFÍA, DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE DOS DIMENSIONES, Y TRAZO DEL PLANO DE LA TRIANGULACIÓN.

44.—Si se tiene una red de triángulos $A\ B\ C$, $B\ D\ C$, $E\ D\ C$........., fig. 36, útil es referir las posiciones de los vértices A, B, C, D........., á dos líneas fijas $A\ x$ y $A\ y$, que serán

los ejes rectangulares del sistema de coordenadas, si para facilitar los cálculos se prefieren á los ejes oblicuos. De todos modos, siempre es expeditivo elegir como origen uno de los vértices extremos de la triangulación, tal como el A.

Por lo demás, la línea fija $A\ Y$ puede ser uno de los lados de la red, como $A\ F$, supuesto prolongado; y, como á su tiempo veremos, esto es lo más exacto.

Dicho lo anterior, antes de seguir demostraremos este principio: "Si en una red se conoce el ángulo α, fig. 36, que uno de sus lados forma con una línea fija, tal como $A\ Y$, se conocerán todos los demás ángulos que las otras líneas forman con ella, tales como $a\ C\ B$, $B\ A\ Y'$, $C\ B\ c$, $D\ C\ a$, $C\ E\ d$......

Para demostrarlo, tiremos por los vértices $C\ B\ E$..........., paralelas $C\ a$, $B\ c$, $E\ d$........., al eje $A\ Y$, y notemos que resulta:

$$\left.\begin{array}{ll} B\ C\ a=\beta=A\ C\ B-\alpha, & \text{conocido;} \\ \delta=180-(\beta+B\ C\ D+D\ C\ E), & \text{,,} \\ \varepsilon=180^\circ-(B\ A\ C+\alpha), & \text{,,} \\ \gamma=B\ C\ D+\beta, & \text{,,} \end{array}\right\} \ldots\ldots 33$$

y que, así continuando, siempre será posible conocer cualquier ángulo que un lado forma con el eje $A\ Y$. Y además, el que forma con el eje $A\ x$ también será conocido, pues siendo recto el ángulo en A, bastará tomar los complementos de los anteriores.

Demostrado lo anterior, fácil es comprender la formación de los triángulos rectángulos $A\ Ca$, $A\ Bc$, CDe, CEd......., con los cuales se pueden calcular las coordenadas de todos los vértices.

Por ejemplo, se tiene en la figura:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para el vértice } C \Big\{ & \begin{array}{l} x=A\ C\ sen.\ a; \\ y=A\ C\ cos.\ a; \end{array} \\ \text{Para el vértice } B \Big\{ & \begin{array}{l} x=A\ B\ sen.\ \varepsilon; \\ y=A\ B\ cos.\ \varepsilon; \end{array} \\ \text{Para el vértice } E \Big\{ & \begin{array}{l} x=A\ a+C\ d=A\ C sen.\ a+C\ E\ sen.\ \delta; \\ y=a\ C+d\ E=A\ C\ cos.\ a+C\ E\ cos.\ \delta; \end{array} \end{array}\right\} 34$$

y así para cualquier otro vértice.

Antes de continuar, nótese que si la línea fija $A\ F$ es la meridiana, los ángulos formados con ella por los lados de la red, serán precisamente los azimutes de esos lados, y que en consecuencia resulta aún este otro principio: "Cuando en una red se conoce el azimut de uno cualquiera de sus lados, se pueden conocer los de todos los demás."

Ahora bien, dicho lo anterior, se elige generalmente por eje de las Y á la meridiana, y por eje de las X al primer vertical, ó más cierto, á su intersección con la tierra, y de cuyo primer vertical se conoce en Cosmografía su definición.

Según esto, en vez del ángulo a que al principio supusimos llamar al formado con la meridiana, se tomará u, azimut, y el cálculo de otro cualquiera se hará como antes se hizo para $B\ C\ D$........., debiéndose sólo tener presente que, por lo general, se cuentan los azimutes de 0 á 360 y del Norte al Oeste, según se ha dicho. Por lo demás, claro es que lo anterior es completamente convencional.

45.—Hecha esta exposición, hé aquí entre otras muchas aplicaciones, las tres más importantes del método de coordenadas.

I. La primera se refiere al trazo de una línea extensa entre dos puntos A y B, dados en el terreno é invisibles el uno del otro, fig. 37.

En tal problema se forma una cadena de triángulos cuyos vértices extremos se apoyen en A y B; y entonces bien se ve que si $A\ Y$ es eje de las y que pasa por A, las coordenadas del punto B son

$$X=A\ d+D\ b, \text{.........} 35$$

é

$$Y=D\ d+B\ b, \text{.........} 36$$

y que el triángulo $A\ B\ e$ nos dará,

$$tan.\ a=\frac{X}{Y}, \text{.........} 37$$

y además,

$$A\ B=\sqrt{X^2+Y^2} \text{.........} 38$$

Así, no sólo conoceremos la dirección de la línea para trazarla, colocando en *A* el teodolito y dirigiendo el anteojo sobre el ángulo α, sino que además podremos por su medida directa ver, comparándola con la calculada, si en efecto hemos llegado al punto *B*. Por lo demás, ya se deja entender, fig. 38, que la desviación *B B'* podrá ser hasta de 30 metros poco más ó menos, en una línea de 300 kilómetros, que será la máxima que pueda trazarse por procedimientos topográficos, con los mejores métodos é instrumento.

Respecto al trazo material de la línea *A B*, casi siempre sucederá que el ingeniero se desvíe, y llegue, por ejemplo, á *B'* en lugar de á *B*, puesto que, según se ha dicho otras veces, no se puede en topografía llegar á una exactitud angular superior á un segundo, áun con los mejores elementos.

Para eliminar este obstáculo, será más práctico eludir el azimut en grandes líneas y orientarse, no con la meridiana, que jamás cenocerá el topógrafo con 1'' de exactitud, sino con una línea cualquiera, y mejor aún con un lado de la cadena de triángulos, como aquí lo hicimos.

Este método tendrá, por lo mismo, la doble ventaja de eliminar el azimut y de poderse medir directamente el ángulo α, fig. 37, que dará la dirección de *A B*, empleando las fórmulas 34, 35, 36 y 37.

Ahora, calculado α, supongamos, fig. 38, que *A D* sea el lado *A D* de la cadena, fig. 37, y que se trata de situar el anteojo sobre *A B*. figuras 37 y 38. Entonces se mide el ángulo *D A e* con el valor de α, pero como de una sola medida habrá cierto error, según se hizo observar al tratar del trazo de la meridiana, aquí como allá para corregirlo, se manda fijar en él una señal, se repite varias veces la medida de *D A e*, y suponiendo que resulte cierta diferencia entre el primer valor aproximativo de α' y el promedio de los posteriores, lo que será frecuente, se moverá la señal *e* lateralmente la cantidad *e i*, con lo cual el punto *i* quedará sobre *A B*. Para esta corrección, se mide la distancia *A e*, se levanta en *e* la perpen-

dicular $e\ i$ á $A\ e$; y con esto y el ángulo $e\ A\ i$ antes hallado, el triángulo rectángulo $A\ e\ i$, nos dará para $e\ i$,

$$e\ i = A\ e\ tan.\ e\ A\ i \text{.........} 39.$$

Se ve, por lo mismo, que de este modo es posible llegar, con la repetición de los ángulos, á una exactitud muy superior á la que daría el empleo del azimut, "medido indirectamente," y por procedimientos imperfectos.

Sin embargo, por más precauciones que se tomen, sólo accidentalmente se llegará al punto B. Será, por tanto, necesario mover á la línea trazada á B' para hacerla coincidir con $A\ B$, y para ello se opera como sigue: de B se baja la perpendicular, $B\ B'$ á la línea $A\ B'$, cuya magnitud $B\ B'$ se mide, y con este valor y con el de $A\ B'$ que se puede suponer igual con $A\ B$, el triángulo $B\ A\ B'$ nos dará,

$$tan.\ B\ A\ B' = \frac{B\ B'}{A\ B} \text{.........} 40.$$

Conocido este ángulo de desviación $B\ A\ B'$, podrán levantarse por los puntos $i\ b$......... espaciados uniforme aunque arbitrariamente, las perpendiculares $i\ e'$, $b\ b'$........., cuyos valores serán, haciendo $B\ A\ B' = \alpha$,

$$i\ e' = A\ i\ tan.\ \alpha,$$
$$b\ b' = A\ b\ tan.\ \alpha,$$

y así á lo largo de toda la línea $A\ B$, podrán fijarse las señales $i\ b$........., cuya sucesión demarcará á la línea $A\ B$, y resolverá el problema en cuestión.

Como también podría presentarse el problema inverso, esto, es, trazar una línea $A\ B$, de una magnitud dada y bajo un azimut asignado, nótese que en tal caso no habría verificación alguna al llegar á B', y que así no podría tenerse fe en el resultado, pues en el caso anterior, fig. 37, el punto B suponía una señal material sobre el terreno, tal como una mojonera, así como A. Por tal motivo, cuando se presente

este problema, será necesario recurrir á procedimientos astronómicos, para calcular las coordenadas geográficas de los puntos *A B*, y resolver el problema, según métodos especiales de aquella ciencia y la Geodesia.

II. Pasemos á la segunda de las más importantes aplicaciones del método de coordenadas.

Se verá en la figura 42 que cuando en un terreno difícil sólo es posible hallar su perímetro siguiendo líneas á rumbo y distancia, tales como *A a*, *a b*, *b F*...... *A n*, *n d*, *d B*......, se construiría también el plano á rumbo y distancia, pero fácil es ver que resultará más exacto calculando la coordenada de los vértices y situando á éstos en el plano, con sólo dos medidas para cada uno, en vez de las numerosas que requiere el método ordinario, si el elemento *a b* se apoya en *A a*, el *b F* en el *a b*, y así sucesivamente. Respecto á los elementos puntuados, tal como *f' E* en la figura dada, representan brechas que frecuentemente será necesario abrir para poder llegar á las mojoneras que limitan las propiedades.

En cuanto á los cálculos, bastante nos los indica la figura. En efecto, medido el ángulo *a A Y* que el primer elemento *A a* forma con la meridiana *A Y* ó una línea cualquiera que se tome como origen, su complemento dará á α, y formado el triángulo rectángulo *A a c*, nos dará,

$$x=A\,a\cos.\,\alpha;$$

é

$$y=A\,a\,\mathrm{sen.}\,\alpha.$$

Después medido el ángulo $A\,a\,b=\alpha_{,}'$, se tiene,

$$\alpha'=\alpha_{,}'-90^\circ-(90^\circ-\alpha)=(\alpha_{,}'+\alpha)-180^\circ;$$

por lo que α' será conocida, y las coordenadas del punto *b* serán, combinando los triángulos *A a c*, y *a b d*,

$$x=A\,c+a\,d=A\,a\cos.\,\alpha+a\,b\cos.\,\alpha';$$

é

$$y=c\,a+d\,b=A\,a\,\mathrm{sen.}\,\alpha+a\,b\,\mathrm{sen.}\,\alpha';$$

y así se continúa hasta llegar á *F*. Luego, volviendo á *b*, se miden los elementos lineales *b f*, *f' f*, *f' E;* y los angulares *F b f*, *b f f'*, *f f' E*, con cuyos datos se llegará á *E;* y de igual modo se situarán los puntos *B C* y *D*, los cuales, unidos dos á dos, cerrarán el polígono del terreno. Por lo demás, cuando se trabaja con brújula, se eliminan los cálculos de α, α'........, pues ella da directamente los azimutes u u'........., con los que desde luego se pueden formar los triángulos rectángulos necesarios para resolver el problema, tales como *A a c*, *a b d*.........

Finalmente, nótese como veces hay, como complemento del método de rumbo y distancia, en que lo más cómodo es formar polígonos en propiedades pequeñas y contiguas, á cuyo método se llama Poligonometría. Para este caso la figura 43 enseña que también es aplicable con éxito el método de coordenadas.

Sin embargo, la Poligonometría tiene el defecto de necesitar la medida directa de muchas líneas, pues como se ve por la figura 43, si la diagonal *B D* no está despejada para poder medir el ángulo *A B D*, para resolver este triángulo, será necesario medir los lados *A B* y *A D*, así como el ángulo *B A D*. Esto es, en vez de un lado y dos ángulos, que bastarían en la triangulación, se necesitan en la Poligonometría dos lados y un ángulo, dado nuestro ejemplo.

III. Veamos, en fin, la tercera aplicación del método de coordenadas.

Al trazar el plano de la triangulación, se puede proceder en general de dos modos, fig. 39: reducidos los lados de la triangulación á escala, se traza por intersecciones el triángulo *A B C*, y luego, apoyándose en *A B* y *B C* los triángulos siguientes, hasta concluir; ó bien, calculando las coordenadas de los vértices *B*, *C*, *D*..........., se sitúan estos puntos independientemente unos de otros, con los elementos siguientes:

$$\text{Para el punto } B) \begin{cases} x = A\,a = A\,B \cos.\ \alpha; \\ y = B\,a = A\,B \operatorname{sen.}\ \alpha. \end{cases}$$

$$\text{Para el punto } C) \begin{cases} x = A\,b = A\,C \cos.\ \beta; \\ y = C\,b = A\,C \operatorname{sen.}\ \beta. \end{cases}$$

y así para cada uno de los vértices.

Fácil es comprender que en el primer método lleva consigo cada vértice los errores con que lo dió el cálculo, los gráficos del trazo de los anteriores; y los gráficos de su propio trazo; mientras que, por el método de coordenadas, se elimina, en cada vértice, el error gráfico de los anteriores, y así tiene esta ventaja sobre el método de intersecciones, en el cual, acumulándose los errores, se deforman más los planos.

Esta sencilla propiedad del método de coordenadas, de hacer independientes en cada vértice sus errores gráficos al trazar el plano de la red, le da una superioridad tal sobre todos los demás, que es el único que se emplea en trabajos de precisión.

46.—Mas para aplicar el método de coordenadas con éxito, es necesario recordar que en el párrafo 44 se presentó el problema de los cálculos de las coordenadas de los vértices, suponiendo la tierra plana; lo cual, si no entraña errores en pequeñas superficies, sí los ocasiona, y grandes, en las extensas, á causa de la convergencia de los meridianos, la que destruye el supuesto del paralelismo de todas las líneas que pasan por los vértices de los triángulos, fig. 36, lo que hace, que si no por los errores gráficos, sí por la referida convergencia, los planos se deformen.

Calculemos, pues, la referida convergencia, que llamaremos c, fig. 40, y cuya convergencia no es sino el suplemento de la suma de los azimutes directo é inverso u y u', cuando ya no pueden suponerse paralelos los meridianos que pasan

por los puntos A y B, en virtud de la magnitud de la línea $A\ B$, pues á nuestra latitud, la convergencia para $u=90°$, es próximamente de $1''$ por cada 50 metros, según la fórmula 42, que vamos á ver.

Suponiendo: $k=A\ B$; φ y φ' latitudes de los punto A y B; u azimut de $A\ B$, y u' azimut inverso de $A\ B$ ó directo de $B\ A$, tendremos, en el triángulo esférico $P\ A\ B$,

$$sen.\ u' = -sen.\ u \frac{cos.\ \varphi}{cos.\ \varphi'};$$

y si se supone que se tenga $\varphi=\varphi'-\Delta\ \varphi$, desarrollamos el $cos.\ (\varphi'-\Delta\ \varphi)$, suponiendo $cos.\ \Delta\ \varphi=1$ y $sen.\ \Delta\ \varphi=\Delta\ \varphi$, por la pequeñez de $\Delta\ \varphi$; y llevamos el valor $cos.\ \varphi=cos.\ (\varphi'-\Delta\ \varphi)=cos.\ \varphi'+\Delta\ \varphi\ sen.\ \varphi'$ á la ecuación anterior, resulta,

$$sen.\ u' = -sen.\ u - sen.\ u\ tan.\ \varphi\ \Delta\ \varphi \ldots\ldots\ldots 41.$$

Ahora, por la figura se tiene, siendo $a=360-u$,

$$u'=180°-(a+c)=180-(360-u+c)=-(180-(u-c)\ ),$$

y en consecuencia con $cos.\ c=1$ y $sen.\ c=c$, por la pequeñez de c,

$$sen.\ u' = -sen.\ u + c\ cos.\ u,$$

ecuación que restada de la 40, produce, despejando á c,

$$c = -\frac{sen.\ u\ tan.\ \varphi}{cos.\ u}\ \Delta\ \varphi.$$

Para simplificar esta expresión, nótese que si llevamos en la figura 40 $B\ C$ perpendicular con $A\ P$, bien se puede suponer plano y rectángulo el triángulo $A\ B\ C$, por lo que se tendrá,

$$\Delta\ \varphi = K\ cos.\ u,$$

cuyo valor, llevado al de c, produce,

$$c = -K\ sen.\ u\ tan.\ \varphi,$$

ó bien en segundos, dividiendo á $\Delta\varphi$ por R *sen.* 1″, siendo R el radio terrestre; y suponiendo $\frac{tan.\ \varphi}{R\ sen.\ 1''}=C$,

$$c=-C\,K\,sen.\,u\text{.........}42.$$

Respecto al signo de c, nótese que lo determina u azimut, el que variando de 0 á 360° tiene para su seno el doble signo $\pm$. Por ejemplo, en nuestra figura se tiene: $u>180$...... $-sen.\ u$; y desde luego $c=C\,K\,sen.\ u$ es decir c positivo; lo cual indica que para que se pueda suponer $P\,B$ paralelo á $P\,A$, se debe tomar "$u'+c$," resultando la línea $n\,n'$, paralela á $P\,A$.

Así es que se tiene,

B en el 1ᵉʳ· cuadrante;	.........$u<90°$	.........$+sen.\ u$	.........$-c$
,, ,, ,, 2º	,,	.........$u<180$	.........$+sen.\ u$	.........$-c$
,, ,, ,, 3º	,,	.........$u>180$	.........$-sen.\ u$	.........$+c$
,, ,, ,, 4º	,,	.........$u>180$	.........$-sen.\ u$	.........$+c$

Por lo que se ve que la convergencia es aditiva al Oriente y substractiva al Poniente.

Por lo demás, estos signos deben siempre confirmarse geométricamente, pues es muy fácil un desliz.

Fácil es ya aplicar el método en cuestión, llevando en cuenta la convergencia de los meridianos; por ejemplo, y contando siempre á los azimutes 0 á 360° y del Norte al Oeste, se irán calculando, fig. 41, las convergencias c, c', c''........., de los vértices A, B, C........., para sumarlas á los azimutes de estos puntos u' u'' u'''........., los que, preparados así, pueden ya entrar á la combinación del cálculo de las coordenadas de los vértices, seguros de que los errores analíticos serán, con estas correcciones, menores que los gráficos del trazo, en superficies cuya extensión no exceda de los límites aceptados. No será por demás hacer observar, que en vez de la meridiana, puede tomarse un lado cualquiera de la red, si no como origen de azimutes, sí como origen de direcciones,

según lo expuesto en el párrafo 44, y que, aun en este caso, que será el mejor para un trabajo exacto, puesto que el azimut siempre es difícil de obtener con mucha exactitud, podrá servir la combinación anterior de las convergencias de los meridianos, con los ángulos que los lados de la red, para formar los triángulos que den las coordenadas.

47.—Respecto al cálculo de la latitud φ, para entrar á la fórmula 42, veamos con qué aproximación se debe tomar.

Hemos hallado el valor algebraico de c,

$$c = K \, sen. \, u \, tan. \, \varphi,$$

diferenciándola, pues, con relación á c y φ, resulta,

$$d c = \frac{K \, sen. \, u}{cos.^2 \varphi} d \varphi;$$

ó bien,

$$d \varphi = \frac{cos.^2 \varphi}{K \, sen. \, u} d \, c \ldots\ldots\ldots .43.$$

Ahora, suponiendo que los ángulos se tracen con un radio de $0,^{m.}25$, lo que ya da una gran precisión, y es un radio bastante cómodo para el trabajo, veamos cuál es el error del arco cuando se cometa en él uno de $0,^{m.}0001$. Para ello la circunferencia debida al radio de $0,^{m.}25$, será $2 \pi r = 1,^{m.}57079$. Y entonces, considerando siempre á $0,^{m.}0001$ como el límite superior de la apreciación, al dibujar el plano, resulta,

$$1,^{m.}57079 : 360 :: 0,^{m.}0001 : x = 72'',$$

que será el menor error probable que se pueda cometer al trazar un ángulo, y en consecuencia, el mayor con que se debe calcular la convergencia.

Calculando ahora la fórmula 43 con $\varphi = 32$ que es nuestra latitud mayor, en cuyo caso $d \varphi$ resultará el menor, y se estará en el peor caso puesto que entonces será más estrecho ese límite, que indica la exactitud con que se debe tener á φ; $c = 72''$, convergencia apreciable; $k =$ á 20000 metros, longi-

tud media á los lados en los mayores triángulos; y $u=45°$ valor medio de los azimutes que se puedan presentar, resulta para la esfera terrestre del radio $R=6366738$,

R..................	6,80391
$cos.^2 \varphi$..................	9,85012
$d\,c$..................	1,85733
K..................	4,30103
$sen.\ u$..................	9,84949
$d\,\varphi=6°$..................	4,36084

Se ve, por lo expuesto, que basta tomar á φ no sólo para el valor medio de los extremos de la línea de que se trate, sino el medio para todo el terreno levantado, por lo cual bastará tomarla en un plano geográfico cualquiera, con 1° de aproximación á poco más ó menos.

El límite de 6° conviene sólo á la latitud á que se calcula, pero sin embargo, su grado de error nunca engendrará más de 72″ con c.

Calculemos por ejemplo á c con $K=20000$,m. $u=45°$ $y=\varphi$ $=20°$ y 21° respectivamente, y resultará,

$K=20000$............	3,30103	....	3,30103
$sen.\ u$..................	9,84949	....	9,84949
$tan.\ (\varphi=20°)$.........	9,56107	.........$tan.\ (\varphi=21)$.........	9,58418
$c=515''$...............	2,71159	$c'=543$............	2,73470
		$c\ =515$	
		$c'-c=28''$	

Respecto á la fórmula 42, no puede suponerse en ella ni $k=0$, ni $u=0$, porque entonces resultaría,

$$d\,\varphi=\frac{0}{0};$$

en cuya virtud vemos justificadas nuestras hipótesis anteriores, de tomar valores medios para K y u.

En cuanto al trazo material del plano, es ya del resorte de la cátedra de dibujo, y así, nos limitaremos á recordar que su tamaño se fije según la fórmula 26 del párrafo 37; que se le ponga la dirección de la meridiana astronómica, si es un trabajo exacto, y magnética si aproximado, si bien hay quien ponga las dos; y en fin, que debe ponerse también su escala. Además, para distinguir las meridianas astronómica y magnética, la primera se representa por una línea, en cuyo extremo Norte se pone una estrella, y la segunda, por una saeta cuyo dardo se dirige al polo magnético, cortándose ambas líneas por sus mitades, y siendo el ángulo agudo de su intersección á lo que se llama declinación de la aguja, y que es obligatorio dar, así como la fecha en que se obtuvo; pues se sabe que éste es un elemento variable.

Finalmente, para concluir este capítulo creemos útil hacer notar, según lo dicho en el cálculo de los triángulos, que para las coordenadas bastarían logaritmos de cinco decimales á $10''$ enteros, puesto que ello dará una exactitud analítica mayor que la gráfica.

CAPITULO VI.

PROBLEMAS DE LA TRIANGULACIÓN.

48.—Dos son los principales de estos problemas.

I. Cuando se elige por vértice una torre, la esquina de una casa, ó cualquiera otro objeto en cuya vertical C no puede situarse la del teodolito, fig. 44. En tal caso, se elige un punto D próximo á C, y se hace estación midiendo perfectamente á D; $D\,C=e$, y d, llamado ángulo de dirección, y calculando aproximadamente el triángulo $A\ B\ C$ con D en lugar de C, podrán tenerse los valores de a y b, y calcularse el valor exacto de C como sigue:

Los triángulos $A\ o\ D$ y $B\ o\ C$ tienen iguales sus ángulos en o, luego, resulta en ellos,

$$D+\alpha=C+\beta;$$

con lo cual,

$$C=D+(\alpha-\beta)\ldots\ldots\ldots 44.$$

Ahora, los triángulos $C\ D\ A$ y $C\ D\ B$, nos dan respectivamente,

$$sen.\ \alpha=\frac{e}{b}sen.\ (D+d)\ \text{y}\ sen.\ \beta=\frac{e}{a}sen.\ d.$$

Estos valores serán siempre suficientemente exactos á pesar de que a y b sólo sean aproximados, puesto que α y β serán muy pequeños, sólo de unos cuantos segundos; y e insignificante respecto de a y b. Véase la introducción general.

Llevando así estos valores á la ecuación 44, quedará resuelto el problema, pero es oportuno dar dos detalles que en su aplicación lo simplificarán.

Puesto que los valores de α y β son muy pequeños, bien pueden expresarse en segundos, y así su resta será,

$$\alpha-\beta=x=\frac{e.\ sen.\ (D+d)}{b\ sen.\ 1''}-\frac{e.\ sen.\ d}{a\ sen.\ 1''}\ldots\ldots\ldots A.$$

Pero dada esa pequeñez de $\alpha-\beta$, y desde luego de x, si en la relación de la figura,

$$a=b\frac{sen.\ A}{sen.\ (A+C)},$$

ponemos D en lugar de C no habrá gran error. Haciéndolo, pues, y llevando este valor de a á x; desarrollando y simplificando, resulta,

$$x=\frac{e.\ sen.\ D\ sen.\ (A-d)}{b\ sen.\ A\ sen.\ 1''}\ldots\ldots\ldots 45.$$

Se ve por esto que todo se reduce al cálculo de una sola fórmula cuyo resultado con su signo se aplicará á D.

El segundo detalle de este problema es, que el punto D se elija de tal modo, que la distancia e del centro de la estación al centro del teodolito forme parte de una figura geométrica elemental, que se pueda medir fácil y directamente, para que se calcule fácilmente y con exactitud á e.

Por ejemplo, si se ha tomado por vértice el centro C de una torre, fig. 45, se tomará $a\ D$ sobre la prolongación de la cara $a\ e$, y entonces, si $e\ D=c$ y a y b son el largo y ancho de la proyección horizontal de la torre, se tendrá desde luego, $C\ D=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\left(\frac{a}{2}+e\right)^2}$. Sencillez á que no se llegaría colocando el instrumento indiferentemente, por ejemplo, en D'. Para concluir, nótese cómo un pequeño error en la dirección $C\ D$ influye íntegro en C.

Como segundo ejemplo daremos el caso siguiente:

Supongamos que se elige como vértice un macizo circular imcompleto, tal como una gran mojonera derruida, fig. 46, de tal modo que sólo pueda utilizarse una parte para el cálculo, según la figura.

En tal caso se tendrá sucesivamente:

$$o\ e=d\ tan.\ \tfrac{1}{2}\ a;$$
$$A\ C\ a'=C=90-\tfrac{1}{2}\ a \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\ C=45-\tfrac{1}{4}\ a;$$
$$o\ e\ c=e=90-\tfrac{1}{2}\ C=90-(45-\tfrac{1}{4}\ a)=45+\tfrac{1}{4}\ a;$$
$$r=o\ e\ tan.\ e=d\ tan.\ \tfrac{1}{2}\ a\ tan.\ (45+\tfrac{1}{4}\ a) \ldots\ldots\ldots 46.$$

En casos como éste habrá que tomar dos precauciones: situarse á la distancia conveniente del macizo para que la percepción con el anteojo sea perfecta, pues si está muy cerca, la retícula se ve, pero no así las aristas verticales del macizo, y si está léjos, la reducción no es muy exacta; y la otra, tomar á d haciendo centro con la cinta en A y describiendo un arco de círculo cerca de o hasta que se llegue á la tangencia.

El segundo problema, conocido bajo el nombre de problema de los tres vértices, es el siguiente:

Supongamos que al formar una triangulación y pasar por el punto D, fig. 47, del que se descubran de aquella tres vértices A, B y C, se quiere ligar á D con ellos. Para lograrlo, se toman los ángulos α y β, con los que, y los ángulos A B y C del triángulo $A\ B\ C$ y sus lados, se puede calcular á x é y, así como los ángulos A' y C' y los lados a' y c', con cuyos datos queda fijo el triángulo $A\ C\ D$.

Desde luego, para la suma $x+y$ nos la da el cuadrilátero $A\ B\ C\ D$, pues resulta,

$$x+y=360^\circ-(B+\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots 47;$$

y notemos que si conociéramos á $x-y$, x é y se conocerían separadamente, pues se sabe que teniéndose la suma y diferencia de dos cantidades, éstas son determinadas. Busquemos, por tanto, á $x-y$.

Para ello, en los taiángulos $A\ B\ D$ y $B\ D\ C$ se tiene respectivamente,

$$B\ D=c\frac{sen.\ x}{sen.\ \alpha};\ \text{y}\ B\ D=a\frac{sen.\ y}{sen.\ \beta};$$

cuyas relaciones dan, siendo $tan.^2\ \varphi$ una auxiliar conocida,

$$\frac{sen.\ x}{sen.\ y}=\frac{a.\ sen\ \alpha}{c.\ sen.\ \beta}=tan.^2\ \varphi$$

Si ahora sumamos la unidad á los dos miembros de esta ecuación, resulta,

$$\frac{sen.\ x}{sen.\ y}+1=tan.^2\ \varphi+1$$

ó bien,

$$\frac{sen.\ x+sen.\ y}{sen.\ y}=\frac{sen.^2\ \varphi+cos.^2\ \varphi}{cos.^2\ \varphi}\ldots\ldots A.$$

Y si restamos esa unidad á los dos términos de la misma ecuación,

$$\frac{sen.\ x}{sen.\ y}=tan.^2\ \varphi$$

se tiene,

$$\frac{sen.\ x-sen.\ y}{sen.\ y}=\frac{sen.^2\ \varphi-cos.^2\ \varphi}{cos.^2\ \varphi}......B.$$

Dividiendo en seguida las ecuaciones A y B, nos queda,

$$\frac{sen.\ x+sen.\ y}{sen.\ x-sen.\ y}=-cos.\ 2\ \varphi;$$

pero como $sen.\ x+sen.\ y=2\ sen.\ \frac{1}{2}\ (x+y)\ cos.\ \frac{1}{2}\ (x-y)$ y $sen.\ x-sen.\ y=2\ sen.\ \frac{1}{2}\ (x-y)\ cos.\ \frac{1}{2}\ (x-y)$, resulta, despejando á $tan.\ \frac{1}{2}\ (x-y)$,

$$tan.\ \frac{1}{2}\ (x-y)=-tan.\ \frac{1}{2}\ (x+y)\ cos.\ 2\ \varphi......48,$$

con lo cual quedará resuelto en problema, pues conocidos x é y, fácil es deducir ya á A' C' a' y c'.

Como hay autores que hacen $\frac{a\ sen.\ \alpha}{b\ sen.\ \beta}=m$ ó $tan.\ \varphi$, no es por demás hacer notar que no hemos hecho $\frac{a\ sen.\ \alpha}{b\ sen.\ \beta}=tan.^2\ \varphi$ por vía de simple novedad, sino porque debiéndose admitir errores en a, α, b y β, tendrán menor influencia con $tan.^2\ \varphi$ por auxiliar, á la que tengan con $tan.\ \varphi$ ó m.

En efecto, m siempre puede representar una tangente, así es que los dos casos son,

$$f\ (a,\ b,\ \alpha,\ \beta)=tan.\ \varphi$$

ó

$$f\ (a,\ b,\ \alpha,\ \beta)=tan.^2\ \varphi';$$

diferenciando resulta,

$$df\ (a\ b\ \alpha\ \beta)=\frac{d\ \varphi}{cos.^2\ \varphi}......\ d\varphi=df\ (a\ b\ \alpha\ \beta)\ cos.^2\ \varphi$$

de la primera, y

$$df\,(a\;b\;\alpha\;\beta)=\frac{2\;tan.\;\varphi'}{eos.^2\;\varphi'},\;d\;\varphi'\ldots\ldots\;d\;\varphi'=d\,f\,(a\;b\;\alpha\;\beta)\,\frac{cos.^2\;\varphi'}{2\;tan.\;\varphi'}$$

de la segunda.

Ahora, por lo general, $\frac{a\;sen.\;\alpha}{b\;sen.\;\beta}$ será muy próximo á 1, ó sea, se tendrá $\varphi=45°$, dada la fórmula equilátera de los trián_ gulos, por lo que φ y φ' serán casi ignales.

Para que se tenga pues $d\,\varphi=d\,\varphi'$, es según esto necesaria la condición $1=2\;tan.\;\varphi\ldots\ldots tan.\;\varphi=\frac{1}{2}$; que corresponde al ángulo $\varphi=26°\;30'$; del cual en adelante será más ventajoso poner $tan.^2\,\varphi$ y no $tan.\;\varphi$. Ahora, pudiendo variar la tangente entre $\pm\,\infty$, con el ángulo auxiliar φ de 0 á 90°, el cociente $\frac{90}{26}=3$, representa la superioridad de tomar $tan.^2$ en lugar de *tan.* Sin embargo, si resulta $\varphi<26°$, se pudiera volver á calcular con *tan.*, aunque no sería necesario.

50.—Respecto á la discusión de este problema, sólo nos ocuparemos del caso más importante, y es, el remoto de que sea indeterminado, lo cual sucederá cuando los cuatro puntos A, B, C y D estén sobre una misma circunferencia, lo que se conocerá cuando al medir α y β resulte,

$$\alpha+\beta=B,$$

en cuyo caso debe desistirse de situar al punto D, pues claro es que será imposible hacerlo. En efecto, entonces la ecuación 48 nos dará, puesto que $B+\alpha+\beta=180°$,

$$x+y=180°;$$

ó

$$\tfrac{1}{2}\,(x+y)=90°.$$

Y con semejante valor resulta $cot.\;\frac{1}{2}\,(x+y)=0$; y como además,

$$tan.^2-1=\frac{a.\;sen.\;\alpha}{c.\;sen.\;\beta}-1,$$

nos dará,

$$tan.^2 \varphi - 1 = \frac{a. sen. \alpha - c. sen. \beta}{c. sen. \beta},$$

y para el caso se tendrá $\alpha = C$ y $\beta = A$; en lugar de *a sen.* α— *c sen.* β, quedará *a. sen. C—c. sen. A*, cuya resta será = 0, pues el triángulo *A B C* produce, *a. sen. C=c. sen. A*. Así, pues, nos quedará $tan.^2 \varphi - 1 = o$ ó $\varphi = 45°$, y $cos.\ 2\varphi = o$. Llevando ahora estos valores de $cot.\ \frac{1}{2}(x+y)$, y $cos.\ 2\varphi$ á la ecuación 48 hallaremos,

$$-tan.\ \tfrac{1}{2}(x+y)\ cos.\ 2\varphi = \frac{-cos.\ 2\varphi}{cot.\ \frac{1}{2}(x+y)} = \frac{o}{o}.$$

51.—En cuanto á la situación gráfica del punto *D* en el plano, puede hacerse valiéndose de este problema de Geometría: "Sobre una línea conocida, construir un segmento capaz de un ángulo dado;" y en cuya aplicación, las líneas dadas serán los lados del triángulo *A B C*, y los ángulos, los medidos en *D*, esto es, α y β.

Tales son los dos más importantes problemas que pueden presentarse al formar la red, pero téngase presente que sólo deben emplearse en casos absolutamente necesarios, pues nada es superior á la medida directa de los ángulos.

de los accidentes, á cuya representación se llama configuración.

Supongamos que *M*, fig. 48, sea una casa; *N* una labor; *a b* un camino; y en fin, *P* una presa; siendo además *A B* el lado de uno de los triángulos de segundo ó tercer orden.

Pues bien, notemos que si de la casa *M* situamos los puntos *c g o z*, bastará unirlos para representar en el plano su proyección horizontal á escala y orientada. El problema estriba, pues, en saber situar un punto, y para ello hay cinco métodos, llamados: de coordenadas polares, el primero, con el cual el punto *e* queda situado con la distancia *A e* y el ángulo α; de coordenadas rectangulares, con las cuales el punto *g* quedará situado con $A\ e=x$, y $e\ g=y$; de intersecciones, en el que *q* quedará determinado por las distancias *A q* y *B q*, haciendo centro respectivamente en *A* y *B*, y trazando arcos de círculos que por su intersección den á *q*; de rumbo y distancia, como *A q* y el ángulo β para el punto *q*, y luego la distancia *q p* y el ángulo δ, para el punto *p*, y así continuando para situar cuantos puntos sean necesarios; y en fin, el de intersecciones angulares, como situando á *q*, con β y γ.

Si el método de intersecciones angulares es el más rápido para levantar datos en el campo, no lo es para fijarlos en el plano, pues da lugar á la construcción de muchos ángulos. Además, hay casos en los que el de coordenadas polares le supera, como por ejemplo, cuando en el punto *c* sólo se descubre el punto *A*, por obstruir la vista el monte ó cualquier otro obstáculo, al punto *B*; otros hay, en los que el de coordenadas rectangulares es el más propio, como al trazar el camino *a b*, ó levantar el plano de un caserío, y en fin, aun el de rumbo y distancia, que en absoluto es el peor de todos, suele en ciertas circunstancias ser el mejor cuando es muy difícil la aplicación de otro cualquiera, como en la situación de linderos estrechos por espesos bosques, según lo hemos visto en el párrafo 45.

53.—Fácil es, por otra parte, admitir, que los detalles deben situarse con tanta mayor precisión cuanto más importan-

tes, notables y estables sean. Por ejemplo, en la figura dada lo más importante y estable es la presa, pues depende del movimiento del terreno; sigue la casa, que como obra costosa, difícilmente se cambiará de lugar; luego el camino, que resulta de la situación de la propiedad respecto á las circunvecinas, pero cuyo camino puede, no obstante, sufrir ligeros cambios; y por último, la labor, que puede ser abandonada por algunos años, ya para dejar descanzar el terreno ó por cualquiera otra causa, y de la que, después de algún tiempo, pudieran desaparecer hasta sus vestigios.

Nótese que la estabilidad de los detalles da un indicio de su importancia y de la exactitud con que se deben situar. En tal virtud, no deberá extrañarse que para acentuar bien la teoría que desarrollamos, sobre situar los detalles con una exactitud proporcional á su estabilidad é importancia, insistamos en hacer notar que en el ejemplo anterior, la presa es el principal de los detalles.

54.—Concluida esta exposición, naturalmente ocurre que el teodolito tiene un exceso de exactitud para medir ciertos ángulos al levantar detalles, y que ciertas medidas de líneas, no necesitan por cierto la precisión de una base. Precisamente por esto, el topógrafo cuenta con otros instrumentos inferiores al teodolito. Como esos auxiliares son muchos, y además tan sencillos que bastará verlos para comprender su manejo, nos limitaremos á los principales, entre los cuales elegiremos la brújula, el telémetro y el troquiámetro.

Suponemos que ya se tendrá una idea completa de la exactitud que en cada caso se requiera en el levantamiento de detalles, y así concluiremos manifestando, que hecha la triangulación primaria, para las posteriores la exactitud será cada vez menor, al grado de que ya en los últimos y más pequeños triángulos, bastará en cada triángulo observar dos ángulos y deducir el tercero.

Es útil hacer notar que al formar los triángulos de primer orden y el croquis que de la red se lleve, se dé á vista su situación á los detalles más importantes, fijándolos aproximada-

mente, pero bajo la condición "expresa," de que queden dentro de los grandes triángulos que los cojen, pues los perímetros de estos triángulos son los límites de referencia que impiden la dislocación de las figuras en el plano. Por ejemplo, si *A B*, fig. 49, es un elemento de un gran triángulo, y con el lado *a b* de un triángulo secundario se ha situado el estanque *c*, por coordenadas polares, con *b c* y *a*, y en el croquis consta que no debe traspasar á *A B;* si al dibujar el plano viene á *c'*, se disminuirá la distancia *c b*.

Basta este ejemplo para demostrar toda la utilidad de un croquis cuidadosamente trazado, fijándose esencialmente en lo comprendido en cada triángulo de primer orden, pues ello fácilmente evitará equivocaciones.

Sin embargo, dicho queda, que es necesario no llevar estos cuidados á la exageración, sino en relación con el objeto que en cada caso se busca; y no olvidando que el perímetro de cada gran triángulo, divide en zonas el terreno é impide la propagación de los errores, por lo cual no es necesario encadenar mucho los detalles, apoyándolos unos en otros, sino al contrario, independiéndolos y apoyándolos en los triángulos secundarios á su vez relacionados con los primarios.

CAPITULO II.

BRÚJULA.

55.—Conocido este instrumento en Física así como su teoría, nos creemos dispensados de describir la una y de desarrollar la otra. Sólo recordaremos, por tanto, las condiciones principales á que una brújula debe satisfacer, sus correcciones y su manejo.

Sus condiciones deben ser: el eje de suspensión de la barra debe estar en el centro del círculo graduado; el pivote en que repoza, sobre la línea Norte-Sur de la barra, equilibrán-

dola perfectamente; el nivel debe ser paralelo al plano del círculo graduado, y en fin, el anteojo, ó más exactamente, su línea de colimación, será paralela á la línea *N. S.* del círculo graduado.

Respecto á las dos primeras condiciones, si no les satisface la brújula, se corrigen tomando sus lecturas en dos posiciones; esto es, leido el azimut en una, se levanta la aguja y se vuelve hacia arriba su cara inferior, y se hace nueva lectura, siendo el promedio de los dos la indicación verdadera del meridiano magnético.

Tal es en lo absoluto la teoría de la brújula, fundada en el hecho de que si su centro de figura o no coincide con su línea *N. S.*, fig. 50, por ejemplo, la fuerza magnética de la tierra la hará girar sobre su centro de suspensión o', y su polo N irá á N' en lugar de ir á $N_{,}$.

Sin embargo, sólo hemos recordado esta teoría, conocida en Física, para que se vea que ella es la causa de por qué dos brújulas que se comparen no den igual azimut, pues generalmente no las invierten los topógrafos, por no prestarse á ello sus mecanismos y emplearse en trabajos corrientes solamente; pero hay otro método más expedito para detalles insignificantes, aunque menos exacto, que es el que resulta de suponer $o\ o'=0$, no debiéndose creer por éste que el anterior sea inútil, pues con él deben resultar concordantes los trabajos de cuantas brújulas se comparen.

56.—Pasemos al método común, fundado en que dando la brújula los ángulos cuando más con 15′ de aproximación, bien se puede suponer en la figura anterior $o\ o'=0$, puesto que ese error da generalmente uno menor que la antes dicha aproximación.

Recordando en Geometría que la medida de un ángulo cuyo vértice esté dentro del círculo, pero fuera de su centro, tal como o', fig. 51, tiene por medida la semisuma de los arcos que sus lados interceptan, si estos arcos se miden en grados y hacemos $a=a\ b$ y $b=a'_{,}\ b'_{,}$, tendremos, que en la figura, el azimut de $o'\ A$ será,

$$u=\frac{1}{2}(a+b)\ldots\ldots\ldots 49.$$

Luego, para trabajar con la brújula bastará ver las indicaciones de sus dos polos y tomar su semisuma para valor del azimut.

Para concluir esta parte, diremos, que supusimos el anteojo en el centro del círculo de la brújula, para simplificar su estudio, pero que generalmente lo llevan á un lado. En este caso vemos, que si la excentricidad del anteojo no es mucha con relación á la distancia de la señal A, será inútil llevarla en cuenta; pero que si se tiene $o'\,A\,c > 15'$, es preciso llevar en cuenta la excentricidad ó eliminarla.

Para lo primero se tendrá expresando á α en minutos, y siendo e la excentricidad,

$$\alpha=\frac{e}{d\ sen.\ 1'}\ldots\ldots\ldots 50.$$

Para lo segundo vemos, fig. 51, que si el anteojo estuviera de tal modo que su alidada coincidiera con $C\,c$, siendo c el 0 de la graduación, por ejemplo, al moverlo sobre $c\,a'\,b'$ y hasta a, para dirigirlo á A, el arco que su vernier señalara sería $c\,a'\,b'=a$, siendo así que si A estuviera al infinito, llegaría hasta a'solamente. El arco $a'\,b'$ se debe, pues, á la excentricidad, y lo llamaremos x, y la lectura en vez de a será $a-x$.

Ahora, si suponemos que sea α el ángulo $c\,C\,A$, se tendrá,

$$\alpha=a-x+90;$$

y claro es, que si llevamos el anteojo á y, y lo volvemos á dirigir al punto A, llamando b al ángulo $C\,a\,b$, aun resultará,

$$\alpha=b+x-90.$$

Sumando estas ecuaciones resulta,

$$\alpha=\frac{1}{2}(a+b)\ldots\ldots\ldots 51,$$

y restándolas,

$$x=90-\frac{1}{2}(a-b)\ldots\ldots\ldots 52.$$

Vemos por lo anterior, que la primera ecuación demuestra, que para eliminar la excentricidad, basta hacer la doble observación y tomar el promedio de las lecturas. para la indicación de la señal. El ángulo entre las dos señales será, pues,

$$A=\tfrac{1}{2}(a+b)-\tfrac{1}{2}(a'+b')\ldots\ldots\ldots 53.$$

Esto nos parece más rápido que llevarla en cuenta, y además, resulta una medida doblemente exacta.

Como se notará, este método es aplicable á cualquier goniómetro que tenga su anteojo excéntrico, por lo que se debe conservar la regla general siguiente: "En todo goniómetro cuyo anteojo sea excéntrico, si la excentricidad no es despreciable se eliminará por la observación completa." Por lo demás, llamaremos "observación completa" á aquella en que se observa con el anteojo en dos posiciones, según queda dicho.

Todavía, es necesario reflexionar que cuando el cero queda dentro del ángulo medido, se llegará al caso del párrafo 32; esto es, será necesario tomar el suplemento del ángulo obtenido, ó sea, la lectura x será, para una señal,

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b)\pm 180;$$

mas como para el otro lado del ángulo quedaría

$$x'=\tfrac{1}{2}(a'+b')\pm 180,$$

el ángulo de las señales $x'-x=\alpha$, vendrá en fin á ser, de todos modos,

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(a'+b')\ \tfrac{1}{2}(a+b)-\tfrac{1}{2}(a'+b')\ldots\ldots\ldots 54.$$

Por lo demás, antes de trabajar con un goniómetro cualquiera, y especialmente con brújula, es necesario estudiar con cuidado el sentido de su graduación y su teoría, y traducirlas á fórmula para las aplicaciones.

57.—Pasando ahora á las otras correcciones de la brújula, respecto á su línea de colimación y niveles, no creemos que

sea necesario darlas, puesto que se han visto ya al tratar de los goniómetros. Vamos, por tanto, á ocuparnos del manejo de este instrumento, haciendo abstracción de cómo esté graduado, en cada caso particular, que suele ser por cuadrantes, semicircunferencias, ó lo que es más general, de 0 á 360°.

Supongamos que se trata de medir los ángulos A, B y C de un triángulo, fig. 52. Puesta la aguja en 0 en el vertice A, y sobre la meridiana M; para tomar el ángulo A, se llevará el anteojo sucesivamente á los puntos B y C, y tomando los azimutes u y $u_{,}$ de las líneas $A\ B$ y $A\ C$, se tendrá, según la figura,

$$A=u-u_{,};$$

luego, pasando á B, ó se mide u' ó se calcula por la relación $u'=u-180$; mas de cualquiera manera que se proceda, medido $u_{,}'$ á su vez, resulta,

$$B=u_{,}'-u'.$$

Y en fin, pasando á C se tiene de un modo semejante,

$$C=u_{,}''-u''.$$

Estas relaciones no sólo sirven para formar un triángulo, sino que pueden aplicarse para calcular á un dato en función de los otros, pues como en un triángulo cualquiera, se prestan á esos problemas y además están ligados dos á dos sus azimutes, no sólo con A, B y C, sino con 180.

La figura 52 demuestra, además, que conocido el triángulo $A\ B\ C$, es aplicable el problema de los tres vértices para situar al punto D, lo cual nos parece tan fácil, que por su sencillez no merece detalles.

58.—Otra de las aplicaciones de la brújula es seguir fácilmente, á rumbo y distancia, un camino A, B, C, D,........., fig. 53.

Obvia es, en tal caso, la operación, y sólo la mencionamos para hacer notar, que en caminos secundarios, para activar

los trabajos, pueden alternarse las estaciones, es decir, hacerlas en A, C, E,........., pues fácil es deducir los azimutes intermedios. En efecto, conocido u y u'' se tiene,

$$u'=u-180;$$

y

$$u_{\prime}'=180°+u'',$$

y así sucesivamente.

59.—Creemos que lo dicho basta para que cada uno pueda sacar de la brújula el partido todo de que es susceptible, tanto para formar un polígono como para detallar un terreno, ó seguir un camino; y así, manifestaremos, como final, cómo puede descubrirse una causa de atracción que altere sus indicaciones.

Si medidos los azimutes u y u' directo é inverso de la línea $A\ B$ no resulta

$$u'=u-180°,$$

y la línea $A\ B$ no es de tal magnitud que esa discordancia pueda atribuirse á la convergencia de los meridianos, claro es que entre estos puntos $A\ B$, existe, por ejemplo, en M, una causa de atracción en virtud de la cual se tendrá, según la figura lo demuestra,

$$u'-x=u+x-180°.........55,$$

de donde, $x=90+\frac{1}{2}(u'-u)$.

Por lo demás, es natural que x dependerá de las distancias de A y B, á M; y si este punto M, está fuera de $P\ A\ B\ P'$, como en N, x será de signo igual en los dos miembros de la ecuación 53, por lo que, si la distancia $A\ B$ es pequeña, los valores de x en los puntos A y B serán casi iguales, é imposible descubrir la atracción, hasta no llegar frente á M.

Estas causas, así como la tosca aproximación de la brújula, sus oscilaciones antes de entrar en repozo, lo cual quita tiem-

po, y en fin, sus variaciones, que suelen ser fuertes, aun las diurnas, en tiempos anormales, hace que sólo se use en trabajos muy secundarios y para detallar pequeñas extensiones; pero en cambio, su sencillez y fácil manejo, así como la peculiaridad de dar directamente al azimut, la hace el más poderoso auxiliar del teodolito, al grado que muchos de éstos la llevan consigo.

Respecto al cálculo de la declinación de una brújula, trazada astronómicamente la meridiana, según se enseñó en la orientación de la red, bastará, como se dijo en el párrafo 48, poner la línea *N. S.* de la brújula sobre ella y leer el ángulo que la aguja indica con esa dirección.

Para hacer este cálculo es necesario que la línea de fé de la brújula sea paralela á la línea 0 y 180° del teodolito. Los constructores cuidan mucho de esto, pero puede verificarse como sigue.

Puesto el teodolito por verificar en el patio de una casa, del segundo piso y sobre la meridiana magnética que señale se visa con otro goniómetro, cuya línea de colimación se pone sobre la línea de fé de la brújula que se estudia. Si entonces se dirigen los anteojos uno á otro sin moverlos en azimut, y se ven sus retículas, alumbrando al objetivo de uno de ellos, claro es que la brújula y la línea de colimación del goniómetro probado están sobre el mismo plano vertical. Si pues entonces la brújula y el limbo señalan 0°, el paralelismo es perfecto, pero en caso contrario, la diferencia de lecturas será el error, que se llevará en cuenta al calcular la declinación. Por lo demás, claro es que ambos teodolitos se nivelarán.

Tal vez haya otro método más fácil, pero confesamos que no lo hemos podido hallar, pues los autores que hemos consultado ni siquiera tratan de esta verificación.

CAPITULO III.

TELÉMETROS.

60.—Se llaman telémetros todos los instrumentos que sirven para medir distancias, sin la aplicación directa de una unidad de medida sobre el terreno.

Siendo muchos los telémetros, sólo nos ocuparemos de los mejores para el topógrafo, pues los demás se comprenderán por las cartillas con que se venden, y que contienen sus teorías y modo de usarse.

Los telémetros de que vamos á hablar, tienen sus teorías casi iguales, pues sólo se diferencían en un detalle, que á su tiempo haremos notar.

Supongamos que A y B sean el ocular y el objetivo del anteojo de un teodolito; m n, dos hilos, fig. 54, horizontales de la retícula; e, el tripié; y a b, un estadal, que es una regla dividida, y de dos, tres y aun cuatro metros de largo, pudiéndose algunas veces doblar en dos ó más partes, por unas bisagras que al efecto tienen, como se verá en cátedra, con los detalles de sus divisiones.

Según la figura referida, vemos, que si se aplica el ojo 0 en el ocular, para visar el estadal a b, m y n se proyectarán en m' n' del objetivo; después, puesto que los rayos m' n' se refractan al cruzar el cristal del objetivo, al salir de él se alejan de las normales del cristal convergiendo á su eje; y en fin, cruzándose en el foco principal o del lente, van á interceptar en el estadal la parte a b. Luego, si el anteojo es horizontal y vertical el estadal, los triángulos m' n' o, y o a b, serán semejantes y darán, haciendo m' $n'=a$; a $b=A$; y siendo c $o=f$, la distancia focal del objetivo,

$$K'=\frac{f}{a}A.$$

Como se ve, si á este valor se aumenta $(f+e)$, se tendrá la

distancia del estadal al centro del teodolito, y llamándola k, se puede poner,

$$k=\frac{f}{a}A-(f-e)\ldots\ldots\ldots 56,$$

fórmula en la cual, con excepción de e, todo es variable, rigurosamente hablando, pero de un modo tan pequeño que solamente en A es el cambio notable.

Diferenciémosla para calcular el error en k, en función del que haya en A, y se tendrá

$$d\,K=\frac{f}{a}d\,A.$$

y como A se puede leer con sólo $0,^{m}001$ de exactitud, á unos 250 metros, tomaremos $d\,A=0,001$, y resulta $d\,K=0,001\,\frac{f}{a}$

Calculada esta fórmula con $f=0,30$, puesto que en las lentes biconvexas de vidrio común el foco principal coincide sensiblemente con el centro de curvatura, y para la lente se tiene $f=r=0,^{m}30$ próximamente, $a=0,^{m}002$, según se verá en un teodolito, resulta,

$$d\,K=0,^{m}152,$$

que será la exactitud con que el telémetro descrito pueda dar una distancia á 250 metros en que pueda leerse con 0,001 de exactitud.

Si ahora se reflexiona que en la medida de las bases se admite 0,0001 de error, y se ve que éste es de 0,152, en una distancia de 250 metros, ó los 0,006 de la magnitud, se comprenderá que el telémetro no puede dar una exactitud comparable con las medidas directas; por lo que sólo debe emplearse en detalles secundarios.

Comprendido esto, esperamos que se nos disculpe no demos á conocer más telémetros, sino otro, que del anterior se deriva, puesto que muy probablemente no habrá ninguno

superior al descrito; y luego, es tan sencillo que cada uno puede poner sus retículas á su teodolito, transformándolo así en telémetro, sin necesidad de un instrumento especial.

61.—Veamos la variante del telémetro descrito. Esta se obtiene tomando por variable no la distancia $a\ b$ del estadal, sino la $m\ n$ de los hilos de la retícula, sirviéndose del micrómetro descrito en el párrafo 30.

Sin embargo, es evidente que la superioridad del de hilos fijos es incontestable, pues en el de hilo movil hay dos variables, $m\ n$ y $a\ b$, y en el de hilos fijos sólo una, $a\ b$; además de que el tornillo del micrómetro acaba por sufrir pequeños gastos que llegan á producir hasta puntos muertos, lo cual resulta cuando dando vuelta á su cabeza no avanza sin embargo el hilo movil.

Creemos, por lo dicho, que en este punto, la Topografía, hasta hoy al menos, ha llegado al máximo de perfección en los telémetros, con el de hilos fijos; y así, debe ser en todos casos, el preferido.

62.—Descrito el telémetro, es necesario manifestar cómo se hallan á f, a y c en la fórmula,

$$K=\frac{f}{a}A+(f+c)$$

Para calcularlas, mejor que medirlas directamente, cosa muy difícil, es tomar con el telémetro mismo varias distancias conocidas perfectamente, á 50, 100, 150, 200 y 250 metros por ejemplo. Entonces, llamándolas k, k', k'', k''' y k^{IV}, se tendrá haciendo $\frac{f}{a}=C$, y $f+c=c$, para calcular no á f, a y c, sino á la relación $\frac{f}{a}$ y á la suma $f+c$ con k, k', k'', k''' y k^{IV} y A, A', A'', A''' y A^{IV},

$$\begin{aligned} K &= C\,A + c; \\ K' &= C\,A' + c; \\ K'' &= C\,A'' + c; \\ K''' &= C\,A''' + c; \\ K^{IV} &= C\,A^{IV} + c. \end{aligned}$$

De este modo, estas ecuaciones, combinadas dos á dos, darán nueve valores para las tres incógnitas, con cuyo promedio, despreciando las discordantes, se tendrán valores muy exactos para C y c, y la fórmula final será,

$$k=C\,A+c.........57.$$

Por lo demás, los valores de C y c serán de la forma,

$$C=\frac{K'-K}{A'-A}..........58$$

y

$$c=K-C\,A.........59$$

que se calcularán con los valores de K y A elegidos según la teoría de los errores dada en la introducción general.

Tal es el telémetro con el cual se puede detallar un terreno pronto y bien.

63.—Ahora, nosotros supusimos en la figura 54 un terreno horizontal, más es evidente que la teoría es la misma si éste está inclinado, y que sólo cambiará el detalle de su aplicación.

Si el terreno fuere horizontal, la estación del teodolito sería en c, fig. 55, y el estadal estaría en $a'\,b$, dando la lectura en $a'\,b$. Mas, existiendo la inclinación i, la estación del teodolito será en la vertical y la indicación del estadal $a\,b$, pues es difícil colocarlo normal al terreno, y por esto siempre se pone vertical.

Resulta, por lo visto, que $a\,b$ es mayor que $a'\,b$, y que conocidos $a\,b$ é i, debe entrarse al cálculo con ellos para determinar á $a'\,b$ y tener á K.

Para ello, es evidente que haciendo $a\,b=A'$ y $a'\,b=A$, resulta,

$$A=A'\ cos.\ i;$$

pero nótese que aun tenemos que reducir al horizonte la dis-

tancia $c\,e'_i$, para lo cual tenemos que multiplicarla por *cos. i*, y se debe tomar, poniendo el valor de A, en la ecuación 57, y puesto que c es pequeño y no vale la pena efectuar su reducción,

$$K' = C\,A'\,cos.^2 i + c,$$

y poniendo $cos.^2 i = 1 - sen.^2 i$, y A en lugar de A',

$$K' = C\,A + c - C\,A\,sen.^2 i \ldots\ldots\ldots 60.$$

cuya fórmula es aplicable con los datos directos de la observación. Por otra parte, para inclinaciones menores de 7°, en que según la fórmula 9 se puede poner para $K=1$, $2\,sen.^2 \frac{1}{2}\,\alpha = 0{,}006$, ó sea, la reducción al horizonte igual á la aproximación del telémetro, aun se pueden tomar los arcos en minutos por los senos, por lo que y calculando los logaritmos de las constantes con tres cifras, puesto que ello dará milímetros, hallaremos,

$$K' = C\,A + c - (3{,}928)\;C\,A\,i^2.$$

Reasumiendo resulta, que las fórmulas del telémetro son:

Para el horizonte.......$K = C\,A + c$...............................61
Para pequeñas inclinaciones ....$K' = C\,A + c - (3{,}928)\;C\,A\,i^2$.........62
Para grandes inclinaciones ....$K'' = C\,A + c - C\,A\,sen.^2 i$...............63

En las cuales cada uno puede reducir á tabla, según su instrumento, las partes $C\,A$ y $C\,A\,i^2$ ó $C\,A\,sen.^2 i$, lo cual facilitará extraordinariamente las aplicaciones.

64.—Finalmente, no será por demás decir que los hilos de la retícula deberán ser muy finos y estar sobre el eje óptico del anteojo, por razones fáciles de comprender. Los instrumentos modernos traen una lámina de vidrio muy delgada y en la que están trazadas las líneas que representan las retícu-

las. De tela de araña, pegadas con goma laca, son también muy buenas, y su distancia es, generalmente, de dos milímetros, porque á mayor separación se ven vagos en casi todos los instrumentos. Sin embargo, este dato depende del poder de los anteojos. Por lo demás, es evidente que en trabajos poco exactos, bien puede desmontarse el anteojo del teodolito y usarse á mano, lo cual facilitará su manejo, sobre todo en la configuración.

CAPITULO IV.

TROQUIÁMETROS.

65.—El más generalmente usado por sencillo y fuerte es el siguiente, figuras 56, 57, 58 y 59, fundado en la teoría del vernier, cuya aplicación vamos á dar.

Si se tienen dos circunferencias concéntricas *a*, *b*, *c*, *d*...... y *a'*, *b'*, *c'*......, fig. 56, la primera dividida en *n* partes, y la segunda en $n-1$, sabemos que las distancias de las divisiones *b* y *b'* serán iguales á una división del limbo $\frac{1}{n}$, partida por el número de divisiones $\frac{1}{n-1}$ del vernier, que en nuestro caso será la circunferencia interior.

Teniéndose pues, $n=100$ que el caso general en los troquiámetros, para la distancia *b b'* se tendrá 0,01 de la circunferencia común.

Comprendido esto, supongamos que los círculos exterior é interior estén animados de un movimiento de rotación según la flecha, proporcional al número de sus divisiones *n* y $n-1$, ó sea 100 para el exterior y 99 para el interior. Es claro que después de una revolución completa del interior, *a'* habrá vuelto á su punto de partida, y *a* aun estará en *b;* y además

entonces distará de b' precisamente lo que antes distaba b de ese punto, pues es más rápido el movimienco de a' que el de a, según lo expuesto, y así, para cuando a venga á b, se tendrá $a\,b'=0{,}01$. Luego, si aun giramos los círculos 0,01 de *a b c d*......, *a*, que antes estaba en *b*, llegará á su origen *a*, pero en tal caso ya habrá coincidido con la división b' de $a'\,b'\,c'\,d'\,a'$, y el caso será el de la figura 57.

Así, pues, vemos que si a' y a son el 0 del limbo y del vernier, por cada revolución completa del vernier, los ceros se desalojan una división del limbo, y que en consecuencia, en un momento cualquiera, el número de revoluciones del vernier será igual al número de divisiones que su cero diste del cero del limbo.

Según esto, en la figura 58 se ve que el vernier ha dado dos revoluciones y cierta fracción de otra, si la flecha marca el origen del movimiento.

Ahora bien, en el troquiámetro el vernier está dividido, por lo general, en 99 partes, y en 100 la circunferencia exterior, según se ha dicho, por lo cual se pueden medir con él hasta 100 revoluciones del vernier.

66.—Expuesta la teoría del troquiámetro, hé aquí su interpretación mecánica, que se comprenderá fácilmente con un instrumento á la vista.

Dos ruedas dentadas pueden girar sobre su centro cuando un tornillo sin fin con que engranan gira sobre su eje; de estas ruedas la exterior tiene 100 dientes y la interior 99. En un marco de metal está fijo el eje del tornillo sin fin, y á este eje está suspendida una placa que á su vez cuelga del eje del tornillo, y cuya placa lleva las ruedas dentadas. Así, si en una rueda, según la figura 59, se fija el troquiámetro de canto, esto es, con su plano perpendicular al de la rueda, al girar ésta, la placa, fig. 59, tomará siempre la vertical, por su propio peso, como en *o c* y $o'\,c'$; y así, dada la combinación del tornillo sin fin y las ruedas dentadas, se irá registrando el número de vueltas que dé la rueda á que se fija el troquiámetro, ya sea ésta la de un carruaje cualquiera, ó bien,

lo que es más general, una rueda especial, que se lleva á mano.

Fácil es ahora comprender que á cada vuelta de la rueda, el vernier uvanza una división del limbo, pues el sólido en que está, habrá hecho una revolución completa al rededor del tornillo sin fin. Multiplicando, según esto, la indicación del instrumento, ó número de revoluciones, por la circunferencia c de la rueda, la distancia k recorrida será,

$$K = n\ c \ldots\ldots\ldots 64.$$

67.—Para investigar la exactitud que pueda dar este instrumento, diferenciemos esta ecuación y tendremos,

$$d\ K = n.\ d\ c;$$

pero como $n = \frac{K}{c}$ nos queda,

$$d\ K = \frac{K}{c} d\ c \ldots\ldots\ldots 65,$$

lo que demuestra la conveniencia de ruedas grandes.

Supongamos ahora, por término medio, para tener una idea material del caso, $K = 40000$ metros $c = 5$ y $d\ c = 0{,}0005$, esto es, $0{,}0001\ c$, que será la exactitud con que se pueda determinar á c. Resulta, según esto, $d\ K = 4$ metros, es decir, $0{,}0001\ K$. Vease, pues, que en abstracto el Troquiámetro es superior al Telémetro. Sin embargo, hay dos causas para que al aplicar el troquiámetro, no deba esperarse la exactitud anterior. En primer lugar, apoyándose la rueda del troquiámetro sobre el terreno, mide una línea sinuosa; y luego, en tiempo de lluvias, el barro que se le adhiere aumenta su radio notablemente.

Por tales razones el troquiámetro sólo se emplea en trabajos para los cuales se busca una idea bastante aproximada solamente del terreno, en los que, en unión de la brújula, proporciona datos bastante numerosos y económicos.

68.—Por lo demás, si en el mango M de la última figura dada se añade al instrumento una lámina $m\ n$ flexible, de acero, que apoye constante y suavemente contra la rueda, tal como se indica en la figura, se eliminará el error á causa del barro en terrenos mojados, pues la limpiadora $m\ n$ lo irá quitando, para que cuando las partes c y b vuelvan á tocar al terreno, se hallen limpias y restituido sensiblemente el valor del radio de la rueda, lo cual será mucho ganar.

En efecto, para una rueda de cinco metros de circunferen cia, que es su magnitud más común, se tiene $r=0,7958$, valor que altera el barro algunas veces hasta 0,015, pero no tomando por término medio sino la mitad, esto es, 0,0075, resulta $r=0,8033$, y $c=5,0453$, por lo que $d\ c=0,0453$ y con la fórmula 65, con este valor y el c, se encuentra,

K..................	4,60206
c..................	0,70306
$d\ c$..................	8,65610
$d\ K=355,^{m.}71$..................	2,55510

lo que es el centésimo de la distancia, ó sea un error inadmisible en trabajos regulares.

Respecto á las líneas inclinadas tendrán por reducción al horizonte $K\ sen.^2 \frac{1}{2}\ a$, según el párrafo 23.

69.—Comparando el Telémetro y Troquiámetro, fácil es ver que el segundo en terrenos planos, conducido rectamente y con limpiadora, será superior al primero; pero que al contrario, en terrenos accidentados, barrancosos, etc., será preferible el primero.

Para la configuración, sobre todo, casi puede decirse que el Telémetro es lo único práctico, como á su tiempo veremos. Respecto á los puntos notables, como pueblos, bastante bien quedarán por la triangulación primaria.

PARTE TERCERA.

NIVELACIÓN.

CAPITULO I.

NIVELACIÓN TOPOGRÁFICA.

70.—Hemos dado ya los medios de hallar la proyección horizontal del terreno, por lo que respecta á su extensión y detalles, pero en los párrafos 37 y 38 se ha visto que no basta esto algunas veces, sino que son necesarios los accidentes y movimientos del suelo.

Para esto último se necesitan, pues, las alturas relativas de los puntos, y aun á veces las absolutas sobre el nivel del mar en sus mareos medios equinocciales, supuesto prolongado hasta redondear la tierra. Al cálculo de estas alturas es á lo que se llama Nivelación, y línea ó curva de nivel á toda línea paralela al mar, tal como *d f*, fig. 60.

Fácil es comprender cuán diversos pueden ser los objetos de una nivelación, y cómo en cada caso unos métodos serán mejores que otros.

Así, pues, en general hay tres métodos:

I. Topográfico. Es aquel en que, siendo pequeñas las diferencias de nivel, se colocan estadales sobre la línea por estudiar, *a*, *b*, *c*, *d*,......, fig. 62, y nivelando el anteojo de un ins-

trumento, esto es, poniéndolo sobre el horizonte, se leen los estadales, y la simple diferencia de sus lecturas da las diferencias de nivel de los puntos á que corresponden; cosa fácil de comprender por la figura. Este método es el más sencillo y á la vez el más exacto; por lo que se reserva á proyectos de aguas y caminos.

II. Trigonométrico. Es el empleado para diferencias de nivel notable en que los estadales no bastan si el anteojo queda horizontal, por lo que, como lo enseña la figura 61, es necesario acudir á la formación de triángulos, tal como el $o\,c\,c_{\prime\prime}$ para calcular las diferencias de nivel. Como enseña la figura citada, el estadal nos da á $o\,c=K$ y el círculo vertical del teodolito á α, con lo cual,

$$c\,c_{\prime}=K\ sen.\ \alpha;$$

y siendo $o\,a=h$, la altura del instrumento, resulta para la diferencia n de nivel entre a y c',

$$n=K\ sen.\ \alpha+h.........66.$$

Como se ve, el carácter distintivo de este método es el empleo de medidas angulares.

III. Barométrico. Se aprendió en Física que es aquella en que se deduce por la indicación barométrica la altura absoluta del punto de observación. Respecto al barómetro, se recordará en Física que puede sustituirse con el hipsómetro ó el aneroide; pero estos no son sino cambios de detalles, pues el fundamento es el mismo, la presión atmosférica.

71.—En el presente capítulo vamos á ocuparnos de la nivelación topográfica, en sus principales detalles.

Niveles.—Para la nivelación de que nos ocupamos siendo inútil la medida de ángulos, el instrumento llamado "nivel," se reduce á un buen nivel provisto de un anteojo poderoso, montado el todo sobre un sistema de tornillos nivelantes, de tal modo que el instrumento sólo tiene un movimiento de rotación horizontal, pues la vertical le es inútil.

A pesar de la sencillez expuesta, los niveles cambian algo, aunque poco, sus desalles, según la fábrica de que proceden, y así, antes de emplearlos, es necesario hacer de ellos un estudio atento para sacar del que se use todo el partido posible.

Respecto á las condiciones á que debe satisfacer un nivel, á la vista de uno fácil es ver que serán, en resumen, las siguientes:

1ª La línea de colimación y el nivel han de ser horizontales, paralelos, y estar sobre un mismo plano vertical, y

2ª La columna del instrumento debe ser vertical, para que al girar el nivel describa un plano horizontal.

Vistos los párrafos 27, 28 y 29 nos creemos dispensados de ocuparnos en detalles para las correcciones necesarias á satisfacer las condiciones anteriores; pues comprendidos aquellos párrafos, fácil será á cualquiera, en vista del mecanismo especial de cada nivel, encontrar los medios de corregirlo. Sólo recomendamos, pues, que se estudie con atención el mecanismo para ver si está en corriente y ofrece estabilidad, pues si ésta falta, será necesario corregir al instrumento con más frecuencia en el curso de un trabajo.

72.—Veamos ahora los principales detalles de ejecución.

Nivelación de una línea.—Supongamos que dada la línea $a\ c$, fig. 62, se nos pide la diferencia de nivel $a'\ c$ de sus extremos.

Conocida la distancia distinta del anteojo, llamando así á aquella hasta la cual la visión en perfecta, y que es generalmente de unos 250$^{m.}$, la tomaremos por unidad de distancia para fijar los estadales a, b, c,......, espaciados al doble de la unidad de distancia; hecho esto, nos colocaremos hacia á los medios m, n y o, de los estadales, y cuyos puntos m, n y o son las estaciones; y en fin, nivelado el instrumento en cada estación, leeremos las indicaciones de los estadales, y será fácil obtener, según la figura,

Diferencia de nivel entre a y b..........$n=h'-h_1$;
" " " " b y c..........$n'=h''-h_2$;
" " " " c y d.........$n''=h'''-h_3$;

y así hasta el fin de la línea. Sumando, pues, algebraicamente, las ecuaciones anteriores, se tendrá,

$$n+n'+\ldots\ldots=N=(h'+h''+\ldots\ldots)-(h_1+h_2+\ldots\ldots)\ldots\ldots..67.$$

Se ve, pues, que la diferencia de nivel entre los puntos extremos de una línea, es igual á la suma de las lecturas de los estadales hacia el principio de la línea menos la suma de las lecturas hacia su fin.

En cuanto á la prescripción de colocar los estadales al mayor poder del anteojo, es importante; pues importa reducir el número de observaciones, puesto que las causas de error se propagan tanto más cuantas más operaciones se efectúan para resolver un problema.

73.—Se comprenderá que podría estacionarse primero en a y leer el estadal b; luego, trasportarse á b y leer el c; y así hasta concluir. Pero este método es inferior al anterior porque en él no se eliminan los errores como en aquel.

En efecto, supongamos que no está bien corregida la colimación c del nivel, aunque sí perfectamente vertical su columna; claro es, fig. 62, que en vez de leer en e y e' leeremos en $e_{,}$ y $e_{,}'$. Pero como se toma, por prescripción, $i\,e=i\,e'$ resulta al girar el anteojo, $e\,e_{,}=e$, $e'e_{,}'=e$, y en consecuencia,

$$n=(h'+e)-(h_1+e)=h'-h_1;$$

esto es, se elimina el error de colimación cuando se observa á ambos lados del anteojo y á iguales distancias. Por lo demás, siendo e pequeño, uno á dos centímetros cuando más, á los 250 metros, y variando proporcionalmente á las distancias, fácil es ver que no es riguroso que los estadales estén exactamente á distancias iguales. En efecto, aun á vista pueden apreciarse las distancias con unos 15 ó 20 metros, y entonces el efecto de e será, aun suponiendo $e=0,^{m\cdot}02$:

$$250 : 0{,}02 :: 230 : e'=0{,}0184;$$

por lo que con $e=0{,}02$ á 250, resulta $e-e'=0{,}02-0{,}0184=0{,}0016$.

Se ve, pues, que bastan las irregularidades del suelo para tener errores mayores; y además, girando el anteojo 180° sobre su eje longitudinal, e cambiará de signo, por lo que, haciéndolo así, si es posible, en dos lecturas de cada estadal, su promedio será exacto aun á diferentes distancias los estadales. No es, pues, error temible, puesto que sobre ser muy pequeño, fácil será distruirlo.

74.—*Nivelación de una superficie.*—Para canales, calzadas, presas, y en general, para trabajos de escabación ó terraplenamiento, es frecuente tener que buscar los movimientos del suelo con bastante aproximación para calcular los volúmenes; y entonces es necesaria la nivelación de muchos puntos sobre una superficie dada.

En tal caso se procede como lo indica la figura 63. Esto es, estacionando el nivel se va colocando el estadal en los diferentes puntos A, B, C, etc., y se leen sus indicaciones, con las que y el rumbo y distancia á que corresponden, se tiene todo lo necesario para calcular el volumen comprendido entre el piso y el plano del nivel, que será el horizonte visible, y circunscrito por el polígono formado por los últimos estadales.

Fácilmente ocurre que cuando el objeto sea buscar una pendiente dada, será indiferente la colocación de los estadales, los que se mandarán por donde el terreno parezca tenerla; pero que cuando al contrario, se busque un volumen, se trace una cuadrícula sobre el terreno, y en sus vértices se coloque el estadal, pues así se facilitará mucho el cálculo del volumen.

Como para el establecimiento de una presa este método siempre será posible, creemos útil completarlo. Nótese, pues, que si se traza la cuadrícula de tal modo que cada cuadrado pueda suponerse plano, el volumen ó columna que lo tenga

por base, siendo su lado l y h la altura media de sus cuatro vértices al horizonte visual, será, con la suficiente exactitud, $l^2 h$; h naturalmente sobre el horizonte, en el que se supondrá trazada la cuadrícula. Así, pues, como a, b, c y d son las cuatro lecturas de los estadales en cada cuadrado, la media próxima será $h=\frac{1}{4}(a+b\ c\ c\ +d)$, y para el volumen total resulta,

$$V=\frac{l^2}{4}((a+b+c+d)+(a'+b'+c'+d')+......)$$

Ahora, como todos los vértices internos de la zona estudiada sirven cada uno á cuatro columnas ó volúmenes elementales, sus alturas se repetirán cuatro veces en la fórmula anterior, por lo que al dividir su suma por 4, según la fórmula, quedarán las mismas; y después, en las exteriores las alturas se repetirán dos veces, en dos cuadrados contiguos, por lo que sacando al 2 como factor común en la fórmula, la suma de estas lecturas quedará dividida por 2. Llamando, pues, a, b, c,......... á las lecturas de los estadales interiores, y a', b', c',......... á las de los exteriores, puede escribirse,

$$V=l^2((a+b+c+......)+\tfrac{1}{2}(a'+b'+c'+......))........68.$$

Creemos que este método y esta fórmula siempre serán en la práctica bastante fáciles y exactos.

Por lo demás, lo anterior supone que el horizonte del nivel enraza con el futuro del volumen ó del agua en la presa; mas si su distancia á ese nivel es $\pm q$, por ejemplo, fácil será calcular el volumen por sumar ó restar al calculado, pues calculada la proyección horizontal del terreno cuya superficie sea s, se tendrá para ese volumen adicional $v=s\ q$, y luego, en fin, el real que contenga la presa,

$$V'=V-v.........69.$$

Si el nivel se coloca á la altura del volumen ó del agua,

desaparecen los estadales exteriores, pues su lectura será nula, y la fórmula 67 viene á ser,

$$V = l^2 (a+b+c+d+e+ \ldots\ldots) \ldots\ldots\ldots 70.$$

Será tan fácil en tal caso el problema, que de ser posible esta solución, valdrá la pena perder algunos minutos en nivelar el instrumento á una altura conveniente.

Pudiéndose leer en los estadales hasta cuatro metros, bien se ve que se puede aplicar el último método en toda presa, para cuya profundidad p se tenga $p < 4^m$. Este caso será, por cierto, el más general; y aplicable no sólo á presas, sino al cálculo de cualquier volumen.

Para concluir debemos hacer notar que cuando siguiendo un gran volumen ó una pendiente larga, se va cambiando la estación, es necesario ligar todas las estaciones á un plano común. Esto es, se lleva una doble nivelación, la de las estaciones y la del proyecto propiamente dicho; y concluido el trabajo todo se refiere á un solo plano de comparación que generalmente es el más alto de todos.

75.—Se ha dicho que en proyectos de aguas y caminos se corrigen perfectamente los niveles; pero esto es sólo en trabajos de primer orden, pues de otro modo, como esas correcciones no son constantes, se emplearía mucho tiempo en ellas.

Fuera de esos casos, lo mejor es, pues, llevar en cuenta la corrección del nivel, porque arreglado el método para ello se puede proceder muy rápidamente, como sigue:

Si en la figura 62 y en la estación m se leen los estadales a y b, como el anteojo gira 180°, leyendo las indicaciones del nivel en las dos posiciones se tendrá lo suficiente para calcular á x, por la fórmula,

$$x = \tfrac{1}{4} \left((o-e) + (o'-e') \right) v.$$

Respecto al signo, será fácil conocerlo siendo o y o' son las lecturas, por ejemplo, hacia el principio de la línea $a\,d$, esto es, hacia á a; y e y e' hacia á d.

Según esto, si es K la distancia de la estación á los estadales, se tendrá que la corrección c por nivel será, con la suficiente exactitud,

$$c = K \, tan. \, x = K \, x = \frac{v}{4} \left((o - e) + (o' - e') \right) K \, sen. \, 1'' \ldots\ldots\ldots 71,$$

siendo o, o', e y e' las lecturas directas del nivel; K la distancia de la estación á los estadales, conocida; y v el valor angular de las divisiones del nivel, que ya hemos visto en el párrafo 28 cómo se calcula.

Ahora bien, en una gran línea será cómodo trabajar á distancias constantes, en cuyo caso en la fórmula 71 será constante la parte $\frac{v}{4} K \, sen. \, 1''$. Llamándola C, resulta, pues,

$$c = \left((o - e) + (o' - e') \right) C \ldots\ldots\ldots 72.$$

Y se ve que será más rápido el cálculo de c que buscar la perfecta nivelación del instrumento.

Por ejemplo, si en un nivel se tiene $v = 36''$, y $K = 250$, resulta,

$\frac{v}{4} = 9$	0,952
$K = 250^{m.}$	2,398
$sen. \, 1''$	4,686
$C = 0,^{m.} 011$	8,036

según esto, la fórmula 72 será,

$$c = 0,^{m.} 011 \left((o - e) + (o' - e') \right).$$

Supongamos ahora que al visar el estadal a, en la figura 62, el nivel dió, hacia á a, $o = 20$ y hacia b, $e = 12$; y luego al visar á b, hacia á a, $o' = 14$ y hacia b, $e' = 8$.

El registro sería, por ejemplo,

NIVELACIÓN DE LA LÍNEA DE.........

Estaciones.	*Estadales.*	*Niveles.*
1ª	a=1,473.........a	o=20, e=12, — 8+
	b=2,174.........b	o'=14, e'=28, — 4—
2ª	b=...............b	o=, e=
	c=...............c	o'=, e'=
3ª		

Resultaría, pues, $(o—e)+(o'—e')= +4$, y el signo más con relación al origen a de la línea $a\ d$. Siendo ahora C=0,011, nos queda, en fin, c=0,m· 011×4=0,m· 044+. Esto es, la retícula pasa en el estadal a sobre el horizonte, y en el b bajo él, pues el ángulo x se refiere al horizonte, según el párrafo 28, y el principio de las lecturas fué hacia á a.

Continuando, vemos que las lecturas correctas y la diferencia de nivel serían,

a =1,473	b=2,174
44—	44+
a'=1,429	2,218
	1,429
	n=0,789

Por lo demás, todas estas operaciones pueden hacerse en el registro, como luego se verá, suponiendo el registro primero con las operaciones anteriores hechas en él:

NIVELACIÓN DE LA LÍNEA DE........

Estaciones.	*Estadales.*	*Niveles.*
1ª	a=1,473	o=20
	44—.............a	e=12
	1,429	8+
	b=2,174	o'=14
	44+.............b	e'=18
	2,218	4—
	n=0,789	8+
		4+
		0,011
		0,044+
2ª	b=	

La esencial ventaja de proceder como se ha indicado, consiste en que basta nivelar sólo medianamente el instrumento, lo cual requiere poco tiempo; y además, aunque sólo se vise un estadal, con girar 180° el anteojo y leer el nivel, podrá aplicarse al punto observado su corrección.

Puede, pues, aplicarse ya estaciónense entre dos estadales, ó sólo se use uno.

76.—La nivelación topográfica da resultados tan exactos, que siguiendo un perímetro de unos 150 kilómetros rodeando un lago, los ingenieros que lo efectuaron se han encontrado, en el extremo opuesto, con sólo 0,m. 40 de discordancia.

Cuando el terreno no permite espaciar los estadales regularmente, aun puede aplicarse la fórmula 65, haciendo la corrección c en proporción de las distancias. Esto será muy fácil, y lo da la proporción,

$$K : K' : : c : c' = \frac{K'}{K} c;$$

ó puesto que $\frac{c}{K}$ será constante, que llamaremos C', quedará, $c'=C' K'$.

Finalmente, claro es que los métodos anteriores son aplicables á los sondeos cuando pueden emplearse estadales sumergidos verticalmente hasta tocar el fondo. Entonces el plano de comparación es la superficie del agua. Respecto á los puntos se situan, generalmente, por el método de intersecciones.

CAPITULO II.

NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA.

77.—En el capítulo anterior hemos dado á conocer esta nivelación y su fórmula, párrafo 70,

$$n=K \, sen. \, a+h;$$

en la cual se supone conocida la distancia entre los puntos cuya diferencia de nivel se busca, fig. 61. Mas esta fórmula sólo basta cuando la distancia K, ú $o\,c'_i$ puede tomarse con el telémetro, y así, sólo puede aplicarse en la configuración, como á su tiempo veremos.

Para hallar pues á n cuando K no puede tomarse con el telémetro, se introduce la distancia $a\,c'_i$, fig. 61, y entonces la fórmula viene á ser,

$$n=K \, cot. \, z+h ....73,$$

y á K se calcula por los datos de la triangulación, siendo generalmente un lado de uno de los triángulos.

De este modo, los vértices de los triángulos, que por lo común se eligen en los puntos más altos del terreno cuando se desea configurarlo, vienen á ser los objetivos de la nivelación. Nótese, pues, que en tal caso, al visar los vértices, no sólo se

leerán las indicaciones azimutales de los goniómetros, sino también las verticales, para efectuar la nivelación.

Así es que con los triángulos primarios se fijan en altura los puntos más notables; después los secundarios con los triángulos de igual orden; y en fin, se concluye con telémetro.

78.—La fórmula 73 bastaría si no existieran á grandes distancias, la convergencia de los vértices y la refracción, pero con estas es necesario llevarlas en cuenta, como sigue.

Se recordará que la fórmula 73 supone paralelas las verticales de la estación a y punto observado c', fig. 61; pero como al aplicar la nivelación trigonométrica, suelen ser muy grandes las distancias de esos puntos, es necesario llevar en cuenta la convergencia de las referidas verticales, así como los efectos de la refracción, fig. 60.

Si, pues, se trata de hallar la diferencia de nivel n entre los puntos A y B, en el triángulo $A\ B\ D$ se tendrá, siendo $A\ D = K$,

$$n = K \frac{sen.\ A}{sen.\ B}.$$

Pero como la figura nos da $A = 180 - (z + A')$, y $B = z - C$; y además, $A' = 90^\circ - \frac{1}{2}\ C$, por lo que resulta, $A = 90^\circ - (z - \frac{1}{2}\ C)$; se tiene, llamando r la refracción, que se debe sumar á z, pues la refrangibilidad del aire, más denso en A que en B, nos dará la visión de B en B', y referiremos el punto B según la tangente á $A\ B'$,

$$n = K \frac{cos.\ (z + r - \frac{1}{2}\ C)}{sen.\ (z + r - C)}.$$

Ahora, como la refracción es proporcional á la masa de aire interpuesta, y ésta á su vez á la separación angular C de las verticales A y B, podremos poner $r = c\ C$, siendo c un coeficiente que luego veremos cómo se calcula. Llevando, pues, este valor de n á la ecuación anterior, se puede poner,

$$z + r - \tfrac{1}{2}\ C = z + c\ C - \tfrac{1}{2}\ C = z - (0{,}5 - c)\ C;$$

y

$$z+r-C=z+c\ C-C=z-(0,5-c)\ C-0,5\ C,$$

por lo que aquella ecuación viene á ser,

$$n=K\frac{cos.\ (z-(05-e)\ C)}{sen.\ (z-(0,5-c)\ C-0,5\ C)},$$

en la cual bien se puede despreciar el último término del denominador $\frac{1}{2}\ C$, en atención á su pequeñez, al gran valor de z y al objeto de la fórmula que buscamos. Haciéndolo y poniendo $(0,5-c)\ C=u$, nos queda,

$$n=K\frac{cos.\ (z-u)}{sen.\ (z-u)},$$

y desarrollando,

$$n=K\frac{cos.\ z\ cos.\ u+sen.\ z\ sen.\ u}{sen.\ z\ cos.\ u-cos.\ z\ sen.\ u},$$

y como z siempre será grande y u pequeño, pues como luego veremos, próximamente se tiene, $c=0,06$, aun podemos suponer, para simplificar, $cos.\ z\ sen.\ u=0$, y resulta,

$$n=K\ cot.\ z+K\ tan.\ u,$$

ó tomando $tan.\ u=u$,

$$n=K\ cot.\ z+K\ u.$$

Pero hemos tomado $u=(0,5-c)\ C$; y como para C se tiene $C=\frac{K}{R}$, muy próximamente; con $u=(0,5-c)\frac{K}{R}$ resulta, en fin,

$$n=K\ cot.\ z+\frac{0,5-c}{R}K^2\ ....74.$$

Vemos por lo expuesto, comparando esta fórmula con la primitiva y despreciando en ella á h, por lo que será,

$$n = K \cot. z,$$

que el factor $\frac{0{,}5-c}{R} K^2$, mide los efectos de la convergencia de las verticales y de la refracción. Respecto de h, es evidente que deberá sumarse al valor n dado por la fórmula 74, pues es la altura del teodolito sobre el terreno.

Veamos ahora cómo han logrado calcular á c.

Si en la figura se traza $A\ A'$ paralela á $C\ B$, resulta,

$$180° = z + z' - C,$$

siendo z y z' las distancias cenitales de B y A tomadas respectivamente de A y B. Pero z y z' serán erroneas, pues estarán afectadas de la refracción r. Suponiendo, pues, esta igual en A y B, resultará sustituyendo y despejando á r,

$$r = 90° + \tfrac{1}{2}\ C - \tfrac{1}{2}\ (z + z') \ldots\ldots\ldots 75$$

y como hemos supuesto $r = c\ C$, aun se tiene, llevando este valor de r á la ecuación 75 y despejando á c,

$$c = 0{,}5 + \frac{1}{C}(90° - \tfrac{1}{2}\ (z + z')) \ldots\ldots\ldots 76$$

fórmula que por término medio produce para México, según parece, $c = 0{,}06$, para distancias á las cuales los mejores anteojos tienen aún su visión distinta para formar triángulos. Nótese que $\frac{1}{2}\ (z + z')$, se acercará tanto más á 90 cuanto menos disten los puntos observados, en virtud de lo cual, estando muy próximos, se puede suponer $\frac{1}{2}\ (z + z') = 90°$, y por tanto, $c = 0{,}5$, por lo que volveremos á tener $n = K \cot. z$, y los cálculos se facilitarán notablemente.

79.—Haremos notar, que cuando el punto observado está más bajo que el de estación, se tendrá $z > 90°$, y que entonces el término $K \cot. z$, de la ecuación 74, será negativo, creciendo su valor numéricamente desde que la visual baja de

$z=90°$; que en a se tendrá $n=o$; y en fin, más allá resultará $K\ cot.\ z >$ (2,8395) K^2, y n empezará á ser negativo. Este último es natural que sucederá siempre que desde tierra se descubra el mar, y dirigiéndole una visual tangente á su superficie se quiera calcular la altura absoluta $B\ D$ de la estación B. Pero como en este caso k será desconocido, es necesario buscar una expresión que no lo contenga, como sigue.

La misma figura 60 nos puede servir suponiendo $z=90°$, y que el mar empieza en e y hasta A, en que la visual $B\ A$ le es tangente.

El triángulo $A\ B\ C$ de la figura nos da,

$$R=(R+n)\ cos.\ C,$$

de donde,

$$n=\frac{1-cos.\ C}{cos.\ C}\ R=\left(\frac{1}{cos.\ C}-1\right) R.$$

Y ahora, elevando á $cos.\ C$ al numerador, desarrollándolo en función de C y simplificando,

$$n=\tfrac{1}{2}\ R\ C^2,$$

ó en rigor, puesto que C debe expresarse en segundos,

$$n=\tfrac{1}{2}\ R\ C^2\ sen.^2\ 1'',$$

en la cual se pondrá el valor de C, $C=z'+r-90°=z'+c\ C-90°$, ó

$$C=\frac{z'-90}{1-c},$$

con lo que,

$$n=\tfrac{1}{2}\ R\ sen.^2\ 1''\left(\frac{z'-90°}{1-c}\right)^2$$

ó calculando, en fin, la constante $\frac{R\ sen.^2\ 1''}{2\ (1-c)^2}$, con $R=6366700$ y $c=0,06$, así como no tomando sino logaritmos de cinco cifras,

puesto que á causa de la refracción, muy variable y fuerte, sobre la superficie del mar, esta fórmula no podrá dar á n sino con unos cuantos metros,

$$n=(5{,}92778)\,(z-90^\circ)^2 \,\ldots\ldots\ldots 77.$$

80.—Como se habrá comprendido, n puede ponerse en función de α, altura, fórmula 66, ó de z, zenital, fórmula 74; y además, nótese que α y z son complementarias, por lo que si hay algún error angular, se eliminirá si α y z entran á n por diferencia.

En efecto, supongamos, fig. 64, el círculo vertical del goniómetro dividido de 0 á 360°, y su graduación en posición directa hacia el punto observado A. Si c es el error de colimación vertical, y g el de cero de la graduación, es decir, la distancia angular del cero supuesto en o á la vertical $C z$ del instrumento, se tendrá, llamando z la zenital de A, y G la graduación leida al visarlo,

$$z=G+g+c;$$

y si después giramos 180 al círculo en cuessión, se tendrá al volver á visar el mismo punto A, puesto que según la figura la graduación quedará en sentido contrario al anterior, ó inversa, como lo indica la flecha,

$$z=360-(G'+g+c).$$

Combinando pues esta ecuación con la anterior, resulta,

$$z=180+\tfrac{1}{2}\,(G-G');$$

y llevando en cuenta las indicaciones del nivel, leido en las dos posiciones y dado por la fórmula 13,

$$z=180+\tfrac{1}{2}\,(G-G')+(\,(o-e)+(o'-e')\,)\frac{v}{4}\ldots\ldots\ldots 78.$$

81.—Fácil será al alumno y por un camino análogo, obtener los expresiones de z con el círculo dividido de 0 á 180 ó de 0 á 90. Las mismas figuras lo darán sin corrección de nivel:

División de 0 á 180......$z=90+\frac{1}{2}(G-G')$.........79,
" " 0 á 90......$z=45+\frac{1}{2}(G-G')$.........80.

Bien que lo anterior es lo más exacto, no todos los instrumentos permiten hacerlo, pues es necesario que sean tránsitos, esto es, que el anteojo pueda girar 180 en azimut y otros tantos en altura.

82.—Para concluir debemos manifestar que más allá de 2 á 3 kilómetros, según el estado de la atmósfera, la nivelación trigonométrica es ya incierta y sólo da una tosca aproximación, á causa de la refracción, variable con la zenital, la presión, la temperatura y la humedad del aire. Por tales razones no creemos que valga la pena llevar en cuenta la inclinación lateral del limbo vertical, que se mide con un nivel llamado montante y que apoya sus piés en el eje horizontal del anteojo; y con tanta más razón cuanto que á la escala á que generalmente se hacen los planos de configuración, desaparecen estos errores.

CAPITULO III.

NIVELACIÓN BAROMÉTRICA.

83.—Suele ser necesario en el cultivo científico de las tierras, ó para cualquiera otra especulación, conocer su altura al nivel del mar, así como su situación respecto de los vientos reinantes en ellos, según la topografía de las proximidades, pues si bien el clima depende de lo primero á igual latitud, también es cierto que se modifica según la acción y naturaleza de los vientos, variable con los terrenos próximos.

por lo que la fórmula 81 viene á ser,

$$n=(4{,}2634)\,(1+0{,}002\,(T+t)\,)\,(log.\ b_n - log.\ b),$$

que es calculable con logaritmos vulgares.

Ahora, puesto que siendo M el módulo de las tablas, se tiene,

$$log.\ (1+0{,}002\,(T+t)\,)=M\ 0{,}002\,(T+t),$$

bien puede simplificarse esta fórmula, poniendo, con $M=$ 0,4343,

$$log.\ n=(4{,}2635)\,(0{,}00087\,(T+t)\,)\,(log.\ b_n - log.\ b)\ldots\ldots\ldots 83.$$

84.—Como el cálculo puede presentar algunas dudas, daremos un ejemplo con: $T=22°20$; $t=14°00$; $b_n=0{,}754$ y $b=0{,}60789$.

Se tendrá,

$T=22{,}2$		
$t=14{,}0$		
36,2	$log.\ b_n$ 9,87737	
0,00087	$log.\ b$ 9,78383	
2534	0,09354	
2896		
		8,97200
0,031494		0,03194
	const.	4,26354
	$n=1851{,}3$..........	3,26748

Tal es la fórmula que hemos elegido para nuestro texto, porque á su sencillez reune la suficiente exactitud, puesto que si bien no se llevan en cuenta en ella los cambios de gravedad y latitud, como estos sólo influyen en dos ó tres metros, y para que las fórmulas que los interpretan den resultados exactos, necesitan una serie de observaciones, é instru-

mentos muy correctos, lo cual implica tiempo y gastos que no compenzan á las operaciones topográficas, creemos que basta con la dada.

Así, pues, quien deseare más detalles, puede consultar obras especiales sobre la materia, en las cuales encontrará multitud de fórmulas.

Respecto de la aplicación de las fórmulas barométricas, se hace poniéndose de acuerdo con un observador en la costa, ó en un lugar de altura conocida, y observando simultáneamente; esto es, á horas iguales y en dias iguales, se toman en las dos estaciones á T, t, b_n y b, con cuyos datos se resuelve el problema. En cuanto á los instrumentos, deben colocarse á la sombra y al abrigo de las corrientes de aire, para evitar fluctuaciones nocivas en sus indicaciones.

85.—Dado á conocer el método, es necesario recordar en Física, que las lecturas del barómetro y termómetro tienen sus correcciones que daremos aquí para completar esta teoría.

La lectura que se lee en un barómetro tiene dos errores: de capilaridad, pues recuérdese que el menisco del mercurio deprime la columna, por lo que hay que añadirle cierta cantidad que es inversamente proporcional á su diámetro; y de temperatura, porque dilatada la escala en que se lee la altura de la columna y que generalmente es de latón, sus divisiones aumentan en tamaño y menor número acusa igual altura barométrica á la que indicara uno mayor, por lo que es necesario añadir algo á la indicación obtenida.

Veamos ahora, separadamente, cada una de estas correcciones.

I. Para la depresión se usa la tabla siguiente en función del diámetro interior del tubo del barómetro; todo en milímetros.

Diámetro.	*Corrección.*	*Diámetro.*	*Corrección.*
4	2,07	12	0,26
5	1,53	13	0,20
6	1,17	14	0,16

Diámetro.	*Corrección.*	*Diámetro.*	*Corrección.*
7	0,91	15	0,12
8	0,71	16	0,10
9	0,56	17	0,08
10	0,44	18	0,06
11	0,35	19	0,03

Respecto del diámetro interior del tubo, se calcula por su circunferencia exterior, sabiendo que sus paredes tienen, por lo regular, unos 0,0025 de espesor, las dos; y que en consecuencia se tendrá, siendo d el diámetro buscado y r el radio exterior,

$$d=2\,r-0{,}0025\ldots\ldots\ldots A,$$

por lo cual con c, circunferencia exterior medida directamente con una cinta fina, se tiene $c=2\,\pi\,r=\ldots\ldots 2\,r=\frac{c}{\pi}=0{,}318\,c$ y en fin, sustituyendo en la ecuación A,

$$d=0{,}318\,c-0{,}0025\ldots\ldots\ldots 84.$$

De igual modo pudiera, con un compás de gruesos, con las puntas encorvadas, tomarse el diámetro exterior del tubo y restarle el grueso de las paredes para obtener el diámetro interior.

Por último, es necesario no olvidar que hay dos clases de barómetros de mercurio: de sifón y de cubeta. En los primeros, el menisco se encuentra en las dos columnas, y como la altura es su diferencia, el error de que tratamos se destruye, por lo que la corrección sólo será al de cubeta.

II. Pasando ahora á la corrección por temperatura, notemos que ésta dilata á la vez á la escala en que está grabada su indicación y á la columna de mercurio, y que grabada la escala sobre latón cuyo coeficiente de dilatación es 0,000018 menor que el del mercurio 0,00018, resulta que el error sólo es en realidad 0,00018—0,000018=0,000162 por cada grado

de temperatura. Haciendo, por tanto, $0{,}000162 = m$, para t grados la corrección será $m\ t$, que se deberá restar á la unidad de altura ó $m\ b\ t$, si b es la altura. En tal virtud, en vez de b se tendrá $b - m\ b\ t = b\ (1 - m\ t)$.

Hechas estas dos correcciones en cada estación, puede entrarse ya al cálculo de la fórmula.

A la última corrección se llama reducción á 0, puesto que $m\ b\ t$ es el cambio que en efecto se tiene en la columna al pasar de 0 á t.

Antes de concluir, diremos que el barómetro, puede sustituirse por el arenoide ó el hipsómetro, que se habrán visto en Física; pero el primero tiene la desventaja de descomponerse fácilmente sin dar indicio alguno de ello, y el segundo necesita frecuentes revisiones de su 0, pues de lo contrario, suele dar errores hasta de 100 metros en alturas considerables. Por tales razones no creemos que deben darse sus descripciones; y más, cuando es nuestro deseo que el uso del barómetro se propague, por ser de grande utilidad para la agricultura.

Finalmente, antes de usar los barómetros y termómetros, es necesario compararlos con otro patron, pues recuérdese que tanto en unos como en otros suelen producirse con el tiempo algunos cambios en sus ceros.

CAPITULO IV.

CONFIGURACIÓN DEL TERRENO.

86.—Se ha dicho que se llama configuración del terreno á la proyección horizontal de sus accidentes, para lo cual era indispensable la nivelación, principalmente la trigonométrica. Conocida ésta, entraremos en materia.

Miles de años hace que el hombre intenta aplicar el dibujo á la representación de que nos ocupamos, y sin embargo, hasta hace sólo unos cuantos se llegó á comprender que el

mejor de todos los métodos es el que representa las proyecciones horizontales de los caminos que un movil, abandonado á su propio peso en una pendiente, traza al rodar por ella, en el supuesto, naturalmente, de que su superficie sea tersa, puesto que es inconcuso que un obstáculo accidental puede desviar ese camino, y sin embargo, el desviado ser el erroneo.

Para explicarnos, supongamos que en la loma *A B C*, fig. 65, *e a a'*......*e* sea una línea ó curba de nivel, que así se llama á la intersección de todo plano horizontal con el terreno; que á cierta distancia vertical y hacia abajo, hay otra curba de nivel *o o' o'' o'''*.........; y en fin, que de B, vértice de la eminencia, se abandonan varios móviles á la gravedad. Es evidente que cada uno de ellos rodará buscando la línea de mayor pendiente; luego, que esa línea es la menor distancia al pié de la eminencia; y por último, que es normal á todas las curbas de nivel. Esto es tan obvio, que creemos inútil toda demostración para quien sepa Geometría y recuerde la teoría del plano inclinado, en Física.

87.—Fundados en lo expuesto, la representación del terreno se hace tomando sobre él varias curbas del nivel equidistante verticalmente, y luego uniendo esas curbas por trazos normales á ellas, tomadas dos á dos. De este modo, si todas las curbas se refieren á un plano de comparación general y tienen en toda la extensión del terreno configurado igual equidistancia, se verá á la simple vista, no sólo el movimiento del terreno en su conjunto, sino aun las alturas relativas de los distintos puntos en él considerados, puesto que una loma, cerro......... tendrá una altura proporcional á las curbas de nivel que lo corten.

Por ejemplo, fig. 66, si *a b c*, *d e'*, *f g* y *h i K* son debidas á un mismo plano secante, es evidente que el orden de las alturas *A B* y *C* por su elevación creciente, será el de aquel en que se han expuesto; esto es, *A*, *B*, *C*, *G*.

Además de la ventaja referida, este método tiene la de dar á conocer fácilmente cuál es el curso de las aguas en un plano que se inspeccione.

En etecto, un thalweg $e\,e'\,e''\,c$, por ejemplo, es siempre una línea inclinada y, en consecuencia, los puntos e, e', c de su intersección con las curbas de nivel están cada vez más altos, y esta ley puede servir para reconocer el curso de un rio. Así, en la figura citada, las curbas $e'\,e_{/}'$ y $e'\,e_{//}'$ están sobre un mismo plano, lo que se conoce por su intersección e' común en el thalweg; así, pasando el rio por $e'\,e_{/}'$ tocando á esa curba en e', y luego tocando á la curba $e\,e_{/}$ que está á menor altura que la $e'\,e_{/}'$, se deduce que e' está más alto que e, y que el rio corre según $e'\,e$. Así en cada caso el estudio de las curbas de nivel dará á conocer la dirección de los thalwegs, que correrán hacia á las curbas más bajas; de los terrenos planos, que serán los circunscritos por curbas de nivel de gran radio, lámina XI, y cuyos terrenos son el lugar de lagunas ó pantanos; del sentido é inclinación de los terrenos, pues la pendiente será tanto más suave cuanto más disten horizontalmente las curbas de nivel, como $h\,e''\,e'\,e\,e_{/}'\,K\,i\,h$ que es menos inclinado que $d\,f\,c'\,e\,g\,B\,d$, lámina XI; y en fin, todo quedará caracterizado.

Expuesto lo anterior, fácil es comprender las siguientes reglas de configuración.

1ª Seguir los thalwegs á rumbo y distancia, haciendo su nivelación y refiriéndolos á la triangulación.

2ª Determinar sobre ellos los puntos de igual nivel.

3ª Situar y nivelar las cimas de las alturas.

4ª Situar las crestas, ó líneas de menor pendiente, que por lo general deben, partiendo del vértice de las cimas, entrar sobre las bisectrices de los vértices de las reuniones de los thalwegs, y

5ª Unir los puntos de igual nivel de los thalwegs, por curbas que vuelvan sus concavidades á los vértices de las alturas y sean normales á las crestas.

Según las anteriores breves nociones, fácil será comprender las importantes aplicaciones de la configuración para obras hidráulicas, y esencialmente para tomas de agua, en las cuales es necesario conocer el punto más bajo de un te-

rreno, y aquellos que en las lluvias le envien el agua. Sobre este particular, llamaremos superficie colectora de las aguas á estos terrenos, y por la figura 66, en que $q\ q'$ supone una presa, se deduce que para obtenerla bastará calcular la del polígono que resulte de unir las cimas de las alturas con los nacimientos de los thalwegs, empezando por un extremo de la presa y hasta concluir por el otro, como $q\ N\ M\ B\ K\ C\ H$.........q'.

88.—Como sería demasiado costoso para la configuración seguir punto á punto los movimientos de un terreno extenso, las curbas de nivel se trazan á grandes intervalos unas de otras, y á vista, en el dibujo, y según los croquis y aun paisajes, se intercalan las necesarias para concluir la representación. En cuanto al método empleado, se ha dicho que es el de la nivelación trigonométrica; dicho lo cual, entraremos en algunos detalles.

Elegido un punto A del cual se descubra la mayor extensión posible del terreno, fig. 67, se manda el estadal sobre una dirección dada, A, a, b, c........., y se toman con el telémetro las distancias $A\ a=k$, $A\ b=k'$......... á la estación A de los puntos a, b, c........., elegidos próximamente á igual altura, así como las cenitales z, z'........ de los referidos puntos visados, con cuyos datos, la fórmula

$$n=K\ cot.\ z,$$

dará sus alturas, respecto al punto A. De igual modo se hace sobre las direcciones A, a', b', c........; A, a'', b'', c''........ y todas las demás que sean necesarias hasta dar la vuelta al horizonte, Después se trasporta el teodolito á otro punto, tal como A', en donde se repite igual operación; y así se continúa hasta recorrer todo el terreno, pero teniendo cuidado de ir á la vez tomando las diferencias de nivel de las diversas estaciones A, A'......... para referir todas las observaciones á un solo plano de comparación. Respecto á los rumbos seguidos, bastará limitarse á los thalwegs y crestas.

Ahora bien, hechas las observaciones y cálculos, y cons-

truidos á escala los perfiles $A\ a\ b\ c$........., $A\ a'\ b'\ c'$......... de la figura anterior, y cuyos perfiles se representan en la 68, es evidente que recostados todos sobre un plano vertical común, los puntos a y a', b y b'........., correspondientes entre sí en cada perfil por el orden de sus distancias á la estación central, no estarán sobre las mismas líneas $e\ e'$, $f\ f'$........., paralelas al horizonte $H\ H'$, pues esos puntos se eligieron sólo aproximadamente á igual altura. Por tanto, en la figura 67 no podrán reunirse los puntos a, a', a''......... para formar una curba de nivel, sino que viniendo á la figura 68 se traza $a'\ c$ paralela á $H\ H'$, y por a' se baja la vertical $a_{\prime}'\ c$, con lo que $a'\ c$ será una corrección que en la figura 67 debe hacerse al punto a' para trasportarlo á otro $a_{\prime}'$, por el que pasará el elemento $a\ a_{\prime}'\ a''$, de la primera curba de nivel. Se ve por lo anterior que estas soluciones basta con que se hagan por construcciones gráficas, á una escala proporcionada á la exactitud que se quiera. Por economía de tiempo y trabajo, fácilmente se verá que es muy útil una escala métrica especial para la configuración, como de 0,01; 0,001;........ y trabajar en papel cuadrícula, rayado á centímetros, milímetros........ y cuyo papel es ya demasiado conocido.

89.—Fácil será comprender que en lugares boscosos y muy accidentados será preciso conformarse con pocos puntos ó emprender grandes desmontes y gastos. Mas por fortuna, para un topógrafo que se dedique con atención al estudio de las leyes naturales de los movimientos de la superficie terrestre, unos cuantos puntos le bastan para que, con ellos y su croquis, haga una buena y económica configuración. Tales son las reglas que á la Topografía incumben, sobre configuración, y respecto á la representación de escarpados, cañadas y demás accidentes, pertenecen al curso de dibujo.

Réstanos sólo manifestar que, según lo demuestra la figura 67, se tomen los diversos azimutes u, u'........, de los diferentes planos de nivelación que así llamaremos á los verticales que, pasando por A, pasan también por los puntos cuyas diferencias de nivel se buscan.

90.—Creemos que este es el lugar de hablar de una corrección que suele ser necesaria al trazar los perímetros de detalle, y cuando no cierran, como $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G$, en que G debía coincidir con A, fig. 69.

En este caso, reformando el método común, proponemos que se elija un vértice D á igual distancia de A y G; que se trace $A\,G$ y se tome el medio e; y se proceda como sigue. Tracense por B, C, D...... las paralelas á $A\,G, B\,e', C\,e''$,...... y haciendo $a+b+c=p$ y $A\,e=e$, tómese sobre ellas, $B\,e'=e'=\frac{p}{e}(b+c)$ y $C\,e''=e''=\frac{p}{e}\,c$; y procediendo de igual modo para el otro semipolígono, los puntos e, e', e''......... serán los vértices del correcto. Por lo demás, se puede proceder gráficamente como sigue, figuras 69 y 70. Tómese, fig. 70, $A\,B=p$, y en la perpendicular $B\,C$, $B\,C=e$; únanse A y C y levántese por C, D......... perpendiculares á $A\,B$, y las líneas $B\,e''$, $D\,e''$......... serán, gráficamente, los valores de las correcciones e', e''.........

La admisión de tal corrección se comprenderá, en vista de la ruda aproximación de los trabajos de detalle y configuración; pero claro es que antes deben revisarse los ángulos y distancias, y no aceptarla sino en último caso. Por lo demás, si uno ó varios vértices del polígono en cuestión es el de un triángulo de la red primaria, no deberá tocarse, y sólo se corregirán las partes intermedias.

PARTE CUARTA.

AGRIMENSURA.

CAPITULO I.

MEDIDAS ANALÍTICAS.

91.—Al dársenos un plano para medir gráficamente su superficie, ni siquiera ocurre preguntar si lo que se quiere es la real del terreno ó la de su proyección horizontal, puesto que es ésta la que á la vista se presenta desde luego, bien que aparentemente.

Pues bien, al tratar la cuestión analíticamente, es también la proyección horizontal la que se pide, porque ella es la que marca el valor real de las tierras en general, puesto que, creciendo la vegetación verticalmente, siendo verticales los muros de las construcciones, y en una palabra, verticales los límites de todo objeto, y horizontales las distancias con que se calculan las plantas de toda instalación, es la proyección horizontal la necesaria.

Para calcular, pues, la superficie de un terreno cuyo plano sea levantado, bastará calcular sucesivamente la de los triángulos de la red, y su suma dará la superficie buscada.

Más como puede suceder que además de triángulos resulten otras figuras que hayan sido indispensables para completar el levantamiento, tales como cuadriláteros, trapecios......,

será necesario aplicarles en cada caso las fórmulas geométricas que expresen sus superficies.

Además, si como lo indica la figura 71, hay linderos sinuosos, se resuelven analíticamente las partes que á ello se presten, y gráficamente, como lo veremos en el capítulo siguiente, las demás, pues otro método más exacto no compensaría los gastos que demandara, por valioso que fuera un terreno; además de que hay linderos curbos cuyas ecuacianes tal vez ni existan.

92.—Inútiles creemos, ni es del curso, dar todas las fórmulas que en estos problemas puedan tener aplicación, y que se hallarán en Geometría, y así, pasaremos á la investigación, por cierto bien sencilla, con que se puede medir el error de una superficie calculada analíticamente.

Para ello, en el párrafo 38 hemos hallado la fórmula,

$$x=(4,95092)\frac{\Delta S}{n S},$$

bajo la condición, no de la exactitud posible, sino de la conveniente. Bastará, pues, tomar á x bajo la condición posible para resolver nuestro problema actual.

Ahora bien, Diaz Covarrubias, y otros autores prácticos y bien reputados, afirman que la exactitud "práctica" y máxima en Topografía en trabajos comunes de triangulación es de 5″; pero como en lo general, aun teniendo buenos elementos, será difícil poseer la práctica y habilidad de aquellos geómetras, creemos que debe tomarse $x=10''$, con lo cual tendremos,

$$\Delta S=(5,04908)\, n\, S.........85.$$

Se ve por lo anterior, que analíticamente el error es proporcional al número de triángulos, lo cual es una nueva y última indicación de que en la red primaria, los triángulos deben reducirse á un mínimo.

Suponiendo ahora, para formarnos una idea material del

problema $n=1$, resulta, tomando el número del coeficiente logarítmico de la fórmula,

$$\Delta S=0,00001\ S.$$

En vista de tal relación, cada uno limitará el número de triángulos primarios hasta donde le sea posible, y calculará, á priori y aproximadamente, el error superficial probable que obtendrá en su trabajo por medio de la fórmula 85, cuyo resultado será la indicación de si debe disminuir aún el número de triángulos de su red, en vista de la exactitud que se proponga alcanzar.

CAPITULO II.

MEDIDAS GRÁFICAS.

93.—La Agrimensura ó medida de la superficie, no siempre necesita sumo rigor, y muy al contrario, es frecuente buscar valores aproximados que bastan para todo un curso de especulaciones ó bien para una vez conocido ese valor próximo, ver si pueden ó no efectuarse ciertos trabajos, en cuyo primer caso, se procede ya á una medición más exacta, por métodos análiticos.

Conocidos los métodos analíticos en el capítulo anterior, veamos en éste los gráficos.

De todos los métodos, el mejor nos parece aquel que descompone la figura ó polígono total del terreno en triángulos, fig. 71; pues siendo el triángulo la figura geométrica más elemental y la que resulta naturalmente con el simple trazo de las diagonales $A\ C$, $D\ B$,........., es la que produce menos líneas, lo que equivale á decir menos causas de error al trazarlas, y la que da fórmulas más sencillas y con menos datos, lo que es un nuevo indicio de exactitud.

Bastará, pues, descomponer en triángulos el polígono da-

do y calcular la superficie de cada uno de ellos por la fórmula general,

$$S=\frac{1}{2} b\, h,$$

sumando todos los resultados para obtener el total.

94.—Mas hay casos en que una ó varias partes del perímetro que circunscribe al terreno es sinuosa, como *A D* en la figura anterior, y entonces es necesario, en aquella figura, restar al triángulo *A B D*, por ejemplo, la parte *A E D.*

Para el cálculo de estas superficies hay varios métodos, y entre ellos uno que se supone como el más exacto, considerando, fig. 72, que todos los elementos *A a*, *a b*........., que resultan de levantar las perpendiculares $a\,a'$, $b\,b'$ de una línea fija *A B* á la sinuosa *A a b* son arcos de parábola. Pero la extrema exactitud supuesta á tal método es, en nuestro concepto, ilusoria. En efecto, él parece fundarse, aunque los autores no lo dicen, en que las líneas sinuosas se deben á los movimientos de terreno: que éste tiene á su vez por origen principal la acción de la gravedad; y por último, que las curbas debidas á esta fuerza son por lo general arcos de parabola. Pues bien, todas, pero más esta última hipótesis se modifica profundamente por los deslaves del terreno, por el continuo y largo trabajo de la vegetación, y en fin, por los movimientos plutónicos que á su vez cambian y se combinan al infinito con la naturaleza y cohesión de las tierras, diferentes á cada paso. Y luego, aun suponiendo que á pesar de estas causas perturbatrices los arcos *A a*, *a b*......... fuesen de parábola, tendrán sus ejes en posiciones diferentes, y en consecuencia, no pueden suponerse paralelos ni aplicárseles una ley general.

También alguien cree posible que se apoya el método en una teoría de las parábolas osculatrices, que no hemos tenido ocasión de ver; pero en tal caso, igual derecho había para fundar otro método en los círculos osculadores, lo que sería más lógico, pues en último caso, el elemento circular es, después del recto, la línea elemental de toda curba. Admiramos

pues, el ingenio del método, pero no tiene para nosotros más exactitud que otro cualquiera. Respecto á que dé resultado, no lo negamos, pues valoriza un elemento superficial pequeño y en el que no se puede afirmar exactitud desde luego que no se conoce la ecuación del lindero sinuoso; así pues, conviene á él el párrafo 11. Habiendo, así, varios métodos de igual resultado, debe optarse por el más sencillo.

95.—Dicho lo anterior, hé aquí el método que por nuestra parte proponemos. Si por ejemplo se trata de medir la superficie $A\,B\,a\,b\,c\,d\,a$, es evidente que si la línea sinuosa $a\,b\,c$......... se descompone en los elementos sensiblemente rectos que ella misma indique por los vértices de sus vientres, y se bajan por los puntos de división perpendiculares á la línea $A\,B$, la superficie de que tratamos quedará descompuesta en triángulos y trapecios, cuya suma será la de la superficie buscada. Haciendo, pues, $A\,a'=a'$ y $a'\,a=a;\ a'\,b'=b'$ y $b'\,b=b;$ es decir, la base y la altura de cada figura elemental igual á la letra respectiva que la limita hacia la derecha y arriba, se tendrá llamando $s,\ s'\ s''$......... á las superficies de $A\,a\,a',\ a'\,b'\,a\,b,$......... y S á la total,

$$s=\tfrac{1}{2}\,a\,a';$$
$$s'=\tfrac{1}{2}\,(a+b)\,b';$$
$$s''=\tfrac{1}{2}\,(b+c)\,c';$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n=\tfrac{1}{2}\,u\,u';$$

y sumándolas, haciendo las operaciones, y sacando $a'\ \tfrac{1}{2}$ como factor común, resultará,

$$S=\tfrac{1}{2}\,(a\,a'+a\,b'+b\,b'+b\,c'+c\,c'+\ldots\ldots u\,u')\ldots\ldots\ldots 86.$$

Se ve, pues, que si llamamos alturas á las líneas $a\,a'=a;\ b\,b'=b;$......... y bases á las $A\,a'=a';\ a'\,b'=b';$......... la superficie dada por la fórmula anterior se encontrará muy fácilmente por ella, y su traducción en regla general selará

sencilla siguiente: "Tómese la semisuma de los productos de cada altura por sus dos bases contiguas."

Prosiguiendo diremos que en las diversas fórmulas dadas por los autores, se suponen iguales las bases $A\ a'$, $a'\ b'$........ que llaman equidistancias y que las simplifican; pero en realidad, estas simplificaciones analíticas traen generalmente dilaciones en la práctica aumentando el número de medidas, tanto más, cuanto que por lo regular los linderos sinuosos tienen muchos elementos rectos, por lo que sujetándose á la condición de tomar equidistancias, resulta un aumento de trabajo en el terreno, que nó se compensa con la sencillez del cálculo en el gabinete.

Por lo demás, creemos que lo más general es el empleo directo de la fórmula 86. Sin embargo, fácil es suponer iguales las bases y sacarla como factor común, con lo cual la fórmula se simplificará notablemente, pues llamando e la equidistancia, quedará,

$$S=\tfrac{1}{2}\ e\ (a+b+c+d+......)\text{.........}87.$$

96.—Sentado esto, veamos qué exactitud debe esperarse de las medidas gráficas. Se ha sentado la expresión elemental analítica,

$$S=\tfrac{1}{2}\ b\ h,$$

siendo b y h la base y altura de un triángulo dado. Si pues suponemos variables á s, b y h y diferenciamos, resulta,

$$d\ S=\tfrac{1}{2}\ b\ dh+\tfrac{1}{2}\ h\ db\text{.........}88.$$

Según esto, puesto que $d\ h$ y $d\ b$ se suponen ser los errores gráficos, pueden tomarse iguales en magnitud y signo, que será el peor cero, por lo cual resulta,

$$d\ S=\tfrac{1}{2}\ (b+h)\ dh,$$

que será la expresión analítica del mayor error gráfico que se puede cometer al medir así una superficie. Hemos supuesto en lo anterior un triángulo, por lo que siendo n se tendrá,

$$d\,S=\tfrac{1}{2}\,n\,(b+h)\,dh,$$

en el supuesto de que todos sean próximamente iguales, lo que es de admitirse, tanto porque así se recomienda que se haga en la triangulación, cuanto porque aquí sólo buscamos un indicio.

Planteada así la cuestión, aun falta atender á la escala, en virtud de la cual, si bien $d\,h$ es constante al efectuar las medidas gráficas y cuyo valor supondremos de $0,^{m}0001$, representará cantidades variables con r, la escala, puesto que se tendrá $d\,h=0{,}0001\,r$. Así, pues, aun se tiene,

$$d\,S=n\,(b+h)\;0{,}00005\,r.$$

Todavía, en atención á que la forma media de los triángulos es la equilátera, aun podemos poner $h=b\;sen.\;60°$, con lo que quedará, calculando el logaritmo de la constante,

$$d\,s=(5{,}96988)\,n\,b\,r.........89.$$

Como ejemplo, supongamos $n=1$, $b=8500$ y $r=30000$, y resultará $d\,s=23792$ metros cuadrados. Aunque este error parece exagerado, nótese que si calculamos la superficie del triángulo equilátero cuyo lado sea de 8500 metros, resulta $S=31285166$ metros cuadrados, y que en consecuencia se tiene,

$$d\,s=0{,}00076\,S,$$

cuyo valor es muy admisible en medidas gráficas, puesto que en ello, según se ha dicho, sólo se busca un valor aproximado de las superficies.

Por lo demás, es evideute que lo anterior supone la exactitud de los datos analíticos y del dibujo; esto es, sólo supone errores al medir la base y altura de los triángulos en que se descompone la figura del plano dado. Mas como para el error á causa de los primeros, hemos hallado en el capítulo anterior,

$$\Delta s=0{,}00001\,n\,S,$$

y para el trazo mismo del plano puede suponerse otro igual al encontrado para valuar gráficamente la superficie, bien puede tomarse para el error de las medidas gráficas, la suma del analítico, más el doble de la expresión dada por la fórmula 89; con lo que, y calculando en números el coeficiente, se tendrá, llamando $\Delta s'$ al error buscado,

$$\Delta s'=0{,}00019\,n\,b\,r+0{,}00001\,n\,S.........90.$$

Como ejemplo, supongamos $n=1$, $b=8500$ y $r=10000$ para un triángulo equilátero. Su superficie será $S=31285166$ metros cuadrados, y $\Delta s'=16463$.

97.—Quien haya seguido con atención estos estudios, habrá notado que la fórmula 89, en el ejemplo anterior, para iguales valores de b y n, nos dió $d\,s=23792$, y que ahora, á pesar de haber duplicado esa expresión y añadídole los errores analíticos, la 90 sólo produjo 16463. Pues bien, tal diferencia se debe á la diversidad de escalas, y así, nótese lo importante que es en las medidas gráficas que los planos estén á grande escala, ó lo que es lo mismo, que r sea lo menor posible. En general, siendo de un diezmilésimo la tolerancia topográfico, la menor escala, para estar de acuerdo con esa tolerancia al medir gráficamente una superficie, debe ser de $\frac{1}{10000}$.

Como pudiera creerse que amplificando un plano de pequeña escala, se llegaría á un error gráfico menor que el que resultaría midiendo la superficie en el plano primitivo, haremos observar que tal esperanza sería infundada, pues la exactitud que pudiera ganarse en la amplificación se perdería al efectuar ésta.

Por lo demás, tanto en la fórmula 85 para el error analítico superficial, como en la 90 para el mismo error gráfico, recuérdese que se expresan los errores máximos en cada caso,

pues bajo esa hipótesis se han venido desarrollando. Según esto, por lo general deberá esperarse una exactitud mayor, puesto que raras veces sucederá que absolutamente todos los elementos nocivos se acumulen en igual sentido. De todos modos n es un factor de la mayor importancia, por lo que importan triángulos grandes para que sean pocos.

Finalmente, la apreciación gráfica aun tiene otra causa de error, y es la higrometría del papel, en virtud de la cual llega á haber hasta un milésimo de fluctuación en las distancias.

CAPITULO III.

VALUACIÓN DE LAS TIERRAS.

98.—Si algo hay difícil es por cierto este punto, que más que al topógrafo concierne al agrónomo. En efecto, se acostumbra, para valuar una propiedad, tomar los productos líquidos de catorce años, y desechando los dos más productivos y otros dos que lo hayan sido menos, tomar el promedio de los diez restantes como el rédito del capital necesario para dar una renta igual, al tipo ó interés que en la localidad tenga el dinero. Es decir, siendo R la renta ó producto líquido de una propiedad, r el interés del dinero y C el capital ó valor que represente la propiedad, se tiene,

$$C=\frac{100\,R}{r} \quad \text{.........91.}$$

Sin embargo, esto supone implícitamente dos condiciones: inteligencia en la administración é ilustración en el cultivo. En efecto, no puede esperarse igual éxito de un hombre inteligente, laborioso é instruido, que de otro apático é ignorante; y luego, aun siendo un buen administrador bajo los anteriores puntos de vista, quien cultive una propiedad, no

le sacará todo el provecho posible si no es además un buen agrónomo.

No obstante lo anterior, es frecuente vender y comprar por la aplicación directa de la fórmula 91 sin atención á la naturaleza de las tierras, sino á sus rendimientos; pero es lógico admitir, que así como en tales operaciones sale sobrando un valuador, cuando en cambio el que compra ó vende quiere proceder con madurez, debe atender á la clasificación de las tierras según su naturaleza, valuando las superficies propias para cada cultivo; las útiles para cría de tal ó cual ganado; los bosques, salinas, fuentes de aguas propias y eventuales; los torrentes que puedan servir como fuerza motriz; la proximidad de los caminos carreteros ó ferreos y de los centros de jornales y consumo; y en una palabra, á cuantos elementos faciliten ó entorpezcan la explotación que se implante ó esté encarrilada en el terreno de que se trate. Bien se deja comprender cuán difícil es valuar en dinero la influencia de todos y cada uno de los elementos enumerados, y cómo, no basta ser un agrónomo instruido, sino también un habil empresario, y perfectamente al tanto del movimiento agrícola no sólo en la localidad de los terrenos de que se trate, sino en una extensión proporcionada á su importancia; pues los caminos de fierro y los vapores nulifican las distancias, cuando es fácil por ellos un trasporte pasando cerca del terreno y aun por él. Fácil es ahora comprender cómo es imposible dar reglas fijas sobre el problema que estudiamos, pues sobre exigir llevar en cuenta los elementos antes enumerados, esos elementos son variables, como el jornal, los fletes y otros que á cada uno ocurrirán. Por lo expuesto, sólo vemos constantes á los factores siguientes: subdivisión de las tierras por clases, según la estimación del cultivo que puedan recibir; cantidad de agua y su situación, más ó ménos adecuada al riego; torrentes ó caidas de agua, si pueden utilizarse como fuerza motriz; bosques, considerando su situación y clase de maderas; criaderos de ganados; centros de jornales; centros de consumo y medios de trasportes. A pesar de esta elección,

tales puntos pueden sólo tratarse de un modo general, y así lo haremos para que cada uno en su caso los aplique según las circunstancias.

99.—CLASIFICACIÓN DE LAS TIERRAS.—Supongamos que las letras A, B, C, marquen cada una una semilla, y por su orden se vea su valor ó producto líqudo que por unidad de medida dejen al año; a, b, c,......... las unidades de superficie necesaria á cada semilla, para producir las unidades anteriores; y en fin, α, β, γ......... el número de años consecutivos que pueda sembrarse en cada lugar, pues sabido es que después de cierto período de cosechas, las tierras necesitan dejarse en cierto reposo ó abonarse.

Es evidente que si hecho el análisis de algunas tierras resulta que la semilla más valiosa que pueden producir es la C, por ejemplo en la región $H\,I\,J$, fig. 73, esa región dará, llamando s''' á su superficie, un número de unidades igual á $\frac{s'''}{C}$; que su valor será $\frac{C\,s'''}{c}$; y que si además, después de γ años, se debe dejar uno de reposo ó gastar lo equivalente en abonos, el producto medio para un año será, en fin, el correspondiente al capital,

$$C_{,}=\frac{100}{r}\cdot\frac{C\,s'''}{c}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+1}\text{.........}92.$$

Hallada la zona más valiosa $H\,I\,J$, supongamos que la que le sigue sea la $F\,G\,D$, en la cual se pueda cultivar la semilla marcada con la letra F; su valor será,

$$C_{,,}=\frac{100}{r}\cdot\frac{F\,s^{\text{IV}}}{c}\cdot\frac{\zeta}{\zeta+1}.$$

Clasificadas así todas las tierras de labor, y llamando L su valor total, éste estará representado por una expresión de la forma siguiente:

$$L=\frac{100}{r}\left(\frac{C\,s'''}{c}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{F\,s^{\text{vi}}}{1}\cdot\frac{\zeta}{\zeta+1}+\ldots\ldots\right)\ldots\ldots 93.$$

100.—Aguas.—Si éstas son constantes y suficientes para el riego en caso necesario, el valor de las tierras labradas no se alterará; pero si no bastan, será necesario calcular la superficie que comprenda sus beneficios, deduciendo las partes no regadas.

101.—Cascadas ó caidas de agua.—Valuaríamos su fuerza en caballos de vapor, y siendo t su número y c el costo del mantenimiento anual de una máquina de igual potencia, tomaríamos por su valor,

$$C_{\prime\prime\prime}=\frac{100\,e}{r}\ldots\ldots\ldots 94.$$

102.—Bosques.—Siendo B la extensión de los bosques y p el precio de la madera que sin destruirlos ó talarlos pueda sacárseles anualmente, su valor será,

$$B=\frac{100}{r}p\ldots\ldots\ldots 95.$$

103.—Criaderos.—Si limitadas todas las zonas de sembradura, se baja en la escala A, B, C, D........., á un punto tal que mejor que sembrar fuera criar algún ganado, y si la superficie propia para ello es S, y s la necesaria por cabeza, $\frac{S}{s}=n$ será el número de éstas que puedan tenerse. Así, pues, si n' es el número de las cabezas que sin menoscabo de n puedan venderse al año, el valor de la fracción superficial será, siendo $n_{\prime}'$ el valor de n',

$$S=\frac{100}{r}\,n_{\prime}'\ldots\ldots\ldots 96.$$

104.—Salinas.—Es evidente que si su producto líquido anual puede ser q, con una buena explotación, su valor será,

$$P=\frac{100}{r}q.........97.$$

105.—Jornales.—Si siempre puede contarse con gente suficiente para los trabajos, es evidente que nada debe deducirse á los valores anteriores; pero si cada n años hay que hacer nuevos enganches, cuyos gastos sean l, obvio es admitir que $\frac{n}{n+1}\,l$, represente el rédito de un capital negativo, pues implica un gasto contrario á las utilidades. Así, pues, tendremos,

$$G=-\frac{100}{r}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot l.........98.$$

106.—Centros de consumo y líneas de transporte.—De tal modo están ligados estos dos importantes factores, que los uniremos para valuar su influencia. Si el terreno estuviese en los alrededores de una capital de primer orden, sus productos tendrían mercado inmediato y en las mejores condiciones, pues sería difícil hacerles competencia gravosa. Mas á medida que de tales centros se aleje un terreno, los costos y dilaciones en el transporte ponen á sus productos en condiciones inferiores á los de los más próximos. Valuando, según esto, esa distancia por el costo de los fletes, si para las haciendas más próximas á los centros de consumo ese flete es k' y á la distancia á que se halla el terreno dado es k, naturalmente $k-k'$ es una pérdida. Y de igual modo es cierto que esta pérdida afecta á todos los productos de la propiedad que consuman flete. Ahora bien, estos productos son aquellos cuyos valores hemos representado por L, B, S y P. Luego, el gasto que ocasionan estos productos será $(L+B+S+P)\,(k-k')$.

Este gasto representará en consecuencia una pérdida anual correspondiente al capital,

$$Q=-\frac{100}{r}(L+B+S+P)\,(K'-K).........99.$$

107.—Sumando ahora con sus signos á los diversos valores hallados, y llamando V al resultado final, nos queda,

$$V=\frac{100}{r}\left((L+B+S+P)-(G+Q)\right)\text{..............}100.$$

Respecto al signo negativo de esta ecuación, manifiesta que puede haber terrenos tan áridos ó mal situados que sean de valor negativo; esto es, perdido cuanto dinero y trabajo se invierta en ellos.

108.—Como lo hemos ya manifestado, muy lejos estamos de creer que lo anterior resuelva satisfactoriamente el problema que estudiamos, pero sí creemos que las indicaciones que asentamos, puedan servir de base alguna vez.

Por lo demás, no será fuera de lugar decir, que es necesario en una explotación agrícola atender no sólo á la cantidad, sino á la calidad de los productos, para elegir con tacto el mercado á que se lleven y evitar con tiempo una competencia ruinosa con frutos superiores.

Finalmente: nada hemos dicho de los edificios, máquinas, ganados, siembras y demás existencias, porque estos son valores independientes del intrínseco del terreno. Así, pues, á este valor del terreno se añadirá el de las existencias justipreciadas debidamente en atención á la localidad.

CAPITULO IV.

AGRODESIA.

109.—Esta parte de la Topografía se ocupa del fraccionamiento de las tierras bajo diversas condiciones dadas á priori, y cuyas condiciones se pueden reducir en términos generales á tres: 1º, cuando dada una propiedad se le quiere dividir en n partes que guarden entre sí una relación dada; 2º, cuando se le quiere dividir en esas mismas partes, pero no

en atención á la superficie, sino al valor de las diversas tierras que la propiedad contenga, y 3º, cuando para grandes operaciones oficiales ó civiles, se divide un gran territorio en lotes iguales. Para este último caso se ha adoptado en los Estados-Unidos del Norte, y se ha generalizado el método, dividir el terreno en cuadriláteros geográficos por meridianos y paralelos; pero requiriendo este sistema conocimiento de Astronomía, bien se ve que no es de nuestra incumbencia darlo á conocer aquí.

Concretándonos, por tanto, á los dos primeros métodos, y siendo verdaderamente infinitos los casos que se pueden presentar, daremos en general la secuela de las operaciones y llamaremos "división de superficies" á aquella en que se prescinde de su valor, y "división de valores superficiales" cuando su valor se lleve en cuenta; pues en efecto, más que superficies, son valores los que se buscan.

110.—División de superficies.—Nada será más fácil que esta división cuando la superficie dada afecte una figura geométrica regular, pues entonces bastará una simple consulta y aplicación de los principios fundamentales de Geometría. Mas este caso es raro; pero sin embargo, la descomposición en triángulos facilitará la resolución de los problemas.

Siendo tantos los casos que se pueden presentar y cuya solución más que de la Topografía depende de la Geometría y del talento del ingeniero, aquí sólo daremos un ejemplo, para dar una idea del camino que deba seguirse en cada caso.

Supongamos que se tenga un terreno de forma triangular *A B C*, fig. 74, y por el cual pase el arroyo *D E;* y que se nos pide dividir el terreno en dos partes iguales, pero de tal modo, que cada una comprenda también partes iguales del arroyo.

Como se ve, el punto o' es el eje de nuestro problema, pues dividiendo el arroyo en dos partes iguales, o' debe pertenecer á la línea divisoria que buscamos. Hallado, pues, o' por la medida directa de la parte $e' e$ del arroyo comprendida dentro del terreno, pueden tomarse los ángulos α y β, con los

cuales y la distancia $o' B$, se resolverá el problema. En efecto, la superficie $n\ m\ B = \frac{1}{2}\ A\ B\ C$ será, llamándola $\frac{1}{2}\ S$ y haciendo $n\ B = n$, $o'\ B = o'$ y $m\ B = m$; por los triángulas $m\ o'\ B$ y $n\ o'\ B$,

$$\frac{1}{2}\ S = \frac{1}{2}\ o'\ n\ sen.\ \beta + \frac{1}{2}\ o'\ m\ sen.\ \alpha;$$

y como también el triángulo $n\ B\ m$ da,

$$\frac{1}{2}\ S = \frac{1}{2}\ m\ n\ sen.\ B,$$

se tendrán dos ecuaciones con dos incógnitas y hallaremos,

$$n = \frac{S}{2\ o'\ sen.\ \beta} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4\ o'^2\ sen.^2\ \beta} - \frac{S\ sen.\ \alpha}{sen.\ B\ sen.\ \beta}},$$

y luego,

$$m = \frac{S}{n\ sen.\ B}.$$

Se tomarán, pues, las distancias $B\ n$ y $B\ m$ con los valores hallados para n y m; y por verificación deben resultar sobre una misma línea los puntos $n\ o'$ y m, con lo cual quedará resuelto el problema. Mas como puede suceder que n resulte imaginario, lo que probará la imposibilidad del problema, se deberá aceptar otra solución eligiendo otro punto o'' más cerca de B.

Por lo demás, la elegancia y economía de estos problemas consisten en tomar pocos datos lineales sobre el terreno, pues la apertura de brechas es generalmente costosa. Por ejemplo, si en nuestro problema los puntos o y B no son visibles el uno del otro, ni tampoco los dos de un punto intermedio M en que se pusiera una señal que sustituyera á o para medir los ángulos α y β, antes de abrir brechas debería buscarse el medio de medir á $B\ o$ sin ello, ó buscar otra solución y sólo aceptar la expuesta en último extremo. En estos problemas la Geometría analítica tiene á veces muy felices aplicaciones, sobre todo, en terrenos despejados.

110.—DIVISIÓN DE VALORES SUPERFICIALES.—Este es problema sin comparación más difícil que el anterior cuando se quiere una solución económica, pues nótese que no basta resolver en el papel un problema, con más ó ménos elegancia, sino que es necesario además que lleve la mayor sencillez posible al terreno, para evitar los desmontes que siempre son costosos. Por comparación, supongamos el problema anterior de dividir el triángulo cogiendo partes iguales del arroyo, pero en la inteligencia de que la zona *C p q*, fig. 75, vale por unidad superficial doble de la zona *B p q A;* y que la propiedad se quiere dividir no ya en dos superficies iguales, sino en dos partes de igual valor.

Siendo *v* el valor de la unidad superficial en la zona *A p q B* y 2 *v* en la zona *C p q*, suponiendo que *m n* sea la línea de división buscada, es necesario que se tenga,

$$v. \, n e q B + 2 v. \, e m q = v. \, A p e n + 2 v. \, p e m c;$$

y se ve que puede ser tal la posición del arroyo, que haga imposible la solución del problema, al cual se le dan dos condiciones: que divida el arroyo en dos partes de igual extensión y al terreno en dos partes de igual valor. Sería, pues, necesario que los dueños del terreno se resolvieran por esta disyuntiva: elegir el punto *o;* ó el punto *e*, figura citada; y elegido uno ú otro, conformarse con la parte de agua que les tocase; y si nada era, como sucedería con la línea *m' n'*, buscar una compensación, cediendo uno el triángulo *u u' n'* en cambio del triángulo *m' i i'*, por ejemplo, que el otro le diera, para que los dos colindantes tuviesen agua.

Creemos que lo expuesto será suficiente para comprender cuán difíciles problemas pueden ocurrir en la Agrodesia, cuando superficies muy irregulares, con muchas clases de tierras y con muebles é inmuebles, se quieran dividir entre varios herederos bajo condiciones diversas. Y de tal modo serán complicados algunos de estos problemas, que será imposible una solución analítica y satisfactoria en todos senti-

dos. En tal caso, soluciones gráficas y por tanteos sanjarán satisfactoria, pronta y económicamente una dificultad semejante.

Por esto hemos estudiado en el capítulo II de esta parte, la exactitud máxima con que se puede medir gráficamente una superficie dada, y ya vimos en aquel capítulo, párrafo 96, cómo en una extensión de 3000 hectaras, valuadas gráficamente, es posible obtener un error de 1,5 hectaras, que sin duda será despreciable ante los gastos y dilaciones que exigiera una solución analítica complicada.

LIBRO SEGUNDO.

DRENAJE.

PARTE PRIMERA.

TEORÍA DEL DRENAJE.

CAPITULO I.

DEFINICIÓN, HISTORIA, EFECTOS Y TEORÍA DEL DRENAJE, Y PRELIMINARES PARA SU ESTABLECIMIENTO.

1. *Definición.*—Drenaje es la desecación del terreno por vía subterranea.

Fácil es comprender que en terrenos planos, horizontales y de bajo nivel, el agua de las lluvias se estanca cuando no hay un subsuelo permeable que les dé salida, por lo que saturado el terreno de agua, perdóneseme la expresión si no es propia, viene á hacer imposible todo cultivo en él. Este será, pues, posible tan luego como pierda el exceso de agua. Se ve así la inmensa utilidad del drenaje en terrenos pantanosos ó demasiado mojados.

Para lograrlo se utiliza la porosidad del terreno, abriendo en él una red de cunetas todas comunicadas, y en cuyos fondos se ponen tubos conductores de las aguas que á ellos llegan por filtración, y que son evacuadas mediante pendientes propiamente elegidas á un punto final de desagüe, lámina XI.

2. *Historia del Drenaje.*—La historia del Drenaje nos es desconocida en sus principios, y sólo sabemos que empezó á

desarrollarse seriamente en Escosia é Inglaterra á principios de este siglo.

También consta que antes se efectuaba el Drenaje colocando simples faginas ó cascajo en el fondo de las cunetas, y que los países citados fueron los primeros en emplear tubos de barro vidriados.

3. *Efectos del Drenaje.*—Los principales efectos del Drenaje son tres.

I. *Efetos físicos.*—Salido el exceso de agua baja su nivel, y las partes de tierras que resultan sobre él tienden á secarse, conservando, sin emhargo, cierta cantidad de agua, á causa de la capilaridad que les mantiene cierta humedad necesaria al cultivo. Substraida así la superficie de la capa de agua subterranea á los rayos solares y las corrientes atmosféricas, sufre menos evaporación, ó lo que equivale á lo mismo, pierde menos calor, que conservado en el terreno lo hace más vigoroso, pues le quita frialdad, atributo del agua estancada y con gran evaporación. Bajo la superficie del suelo hay más calor que sobre ella, por lo que calentados los tubos de drenaje, rarifican el aire, y existiendo la presión atmosférica, se produce uua corriente aerea al exterior del drenaje, cuyo efecto es provocar las filtraciones de agua que arrastrando las materias disueltas y suspensas en ella, dan porosidad al terreno; por cuya causa, los más compactos y arcillosos, se tornan suaves al arado y al trabajo de las raíces, que más fácilmente los penetran. Este es el efecto más notable, más útil y más seguro del drenaje, como puede persuadirse cualquiera por las demostraciones anteriores; y, Disminuida la evaporación, se reducen las neblinas.

II. *Efectos químicos.*—Aumentada la porosidad del terreno, el aire circula más fácilmente en él, llevando en abundancia los gases necesarios á la nutricion de las plantas, cuyas raíces funcionan mejor. Además, impelido el aire por la presión atmosférica y los tubos del drenaje á una circulación más activa, da más calor al suelo y facilita las combinaciones atómicas necesarias á la germinación. Por lo demás, fácil es

comprender como complemento de lo anterior, que los abones serán más fructíferos.

III. *Efectos higiénicos.*—Seca la superficie del suelo, cesan las putrefacciones orgánicas, por lo que el aire es más puro; y además, conservando las tierras su calor, que antes daban al ambiente, éste resulta más fresco. Queda explicado cómo el drenaje es el mejor medio, no sólo para utilizar las tierras pantanosas, sino para sanearlas. Bajo este último punto de vista puede, pues, en muchos casos, ser la base de la higiene en comarcas enteras, haciendas, pueblos, etc.

4. *Teoría del Drenaje.*—Se ha dicho que el Drenaje, aunque muy antiguo, sólo empezó á desarrollarse científicamente á principios del siglo actual, por lo cual es fuerza admitir que aun está en embrión.

Según esto, no hay todavía los datos suficientes para proceder á un establecimiento de drenaje, sin algunas experiencias preliminares; lo que declaramos después de haber consultado algunas obras sobre la materia que nos han dejado en la duda sobre los puntos capitales siguientes:

1º A qué profundidad se debe establecer el drenaje.

2º A qué separación se deben establecer los tubos; y

3º Qué dimensiones deben tener los tubos.

Como se comprenderá, cada una de estas cuestiones sólo quedará resuelta científicamente, cuando haya una fórmula matemática y lógica que lo determine, y tal fórmula, si existe, nos es desconocida. Y no puede ser de otro modo dada la juventud del drenaje. En efecto, el fenómeno físico sobre que reposa es la capilaridad, y fácil es concebir que ésta será variable no sólo con la naturaleza y extructura de las tierras, sino con sus condiciones topográficas y meteorológicas. Más claro, la capilaridad se debe modificar en sus efectos por dos fenómenes principales. La evaporación, que se opone á ella; y la rarefacción del aire en los tubos drenantes, pues con ella y la presión atmosférica, tiende á establecerse fácilmente una corriente de la superficie del suelo á los tubos drenantes, que favorecerá á las filtraciones, esto es, á los efectos benéficos de

la capilaridad. Ahora bien, la evaporación depende esencialmente del calor solar, y éste obra según la latitud y la inclinación de la superficie terrestre considerada; pero se modifica profundamente por las corrientes de aire. Y respecto á la rarefacción del aire en los tubos drenantes, dependerá del poder calorífico de las tierras; pero se modificará también con las corrientes de aire.

Se admitirá ahora que los datos para el establecimiento de un drenaje debieran ser:

1º Naturaleza química de las tierras; q.

2º Su extructura física; f.

3º Cantidad de calor solar recibida por las tierras, según su latitud; s.

4º Cantidad de calor solar reflejada á causa de su inclinación y orientación; r.

5º Cantidad de aire que el viento haga pasar sobre su superficie; a.

6º Inclinación del terreno, obrando como causa de los escurrimientos en los tubos de drenaje; i, y

7º En fin, sequedad necesaria al cultivo por establecer; C.

Vemos, según esto, que la fórmula que dé la sequedad buscada C, en función de los datos anteriores, será en general,

$$C=f'(q, f, s, r, a, i).$$

Nótese, pues, que sobre la variabilidad de estos factores, según las localidades, ignoramos cómo están ligados; esto es, si por suma, resta, multiplicación, etc.

En virtud de las consideraciones anteriores, nos hemos persuadido de que el drenaje sólo es por ahora aplicable con éxito, mediante ciertas experiencias preliminares, partiendo de los datos prácticos siguientes, de Europa: la profundidad media del drenaje es de $0,^{m.}8$, y la separación de sus tubos 10 á 12 metros.

5. *Preliminares para un drenaje.*—Siendo el Drenaje una operación costosa, importa proceder con calma, por lo que

no debe extrañarse que propongamos una experiencia que durará nada menos que un año, lo cual no aducirá nada en contra del Drenaje por dos razones: la primera, y principal, porque antes del Drenaje nada ó muy poco valdrá el terreno, y en consecuencia no es perjuicio esperar uno ó más años en hacerlo útil; y luego, el drenaje siempre valdrá menos que el valor del terreno una vez saneado. Así, pues, su ejecución, siempre que sea necesaria, será una buena operación financiera.

Aceptado esto, fácil será comprender que experiencia será la mejor. "Establecer sobre el terreno, con su inclinación media, tres drenes á 20 ó más metros de separación y á 0,m. 7; 1,m. 0 y 1,m. 3 de profundidad; sembrar al año siguiente en la zona de experimentación; ver sobre qué dren se recoje la mejor cosecha, en calidad y cantidad; y en fin, tomar por profundidad del drenaje la del dren mejor, y por separación de los tubos el doble de aquella á la cual se extendió la acción del dren elegido. A la vez se recojerá como dato complementario, la cantidad de agua evacuada por el dren referido, en la unidad de tiempo y cuando produzca el mayor desagüe."

En el capítulo siguiente veremos el empleo del último dato, y respecto al diámetro de los tubos en la experiencia, puede ser cualquiera, con tal que sea mayor de 0,m. 03.

Concluiremos este capítulo recordando que en terrenos suaves los efectos del drenaje son rápidos, pero que en los compactos y arcillosos suelen empezar á ser sencibles hasta el tercero y cuarto año. De todos modos sus efectos son seguros, pues la rarefacción del aire en los tubos y la presión atmosférica, establecen una corriente perpetua de aire, de la superficie del suelo á los tubos y de éstos al ambiente, á la que nada puede resistir, y la que con el tiempo acaba por producir sus resultados. Respecto á la colocación de los tubos, se hace por justaposición de sus extremos y se da estabilidad á esta reunión por collares ó tubos más pequeños, pero de mayor diámetro, que cojen á los anteriores por sus extremos, figuras 76, 77 y 78, en *a*, *a*, *a*. Finalmente, el fondo de las

cunetas se reconoce, para recibirlo de los peones, por un patrón, que es un rodillo de un diámetro igual al del fondo redondeado de la cuneta, en el que debe sentar perfectamente.

CAPITULO II.

TUBOS DE DRENAJE.—DRENES PRIMARIOS, COLECTORES, Y CANAL DE DESAGUE.—DISTRIBUCIÓN DE LOS TUBOS.—OBSTRUCCIONES EN EL DRENAJE.—ALCANTARILLAS.—TRAZADO.

6. *Tubos de drenaje.*—De varias formas y clases que se han ensayado, los mejores han sido los cilíndricos y de tierras arcillosas.

De una buena obra sobre la materia tomamos lo siguiente:

"Un buen tubo de drenaje debe tener de 0,$^{m.}$ 30 á 0,$^{m.}$ 35 de largo, y su diámetro interior variable con la cantidad de agua que debe trasportar, pero sin que jamás sea menor de 0,$^{m.}$ 03. No debe tener rugosidades interiores y principalmente en sus extremidades, cuyo corte debe ser limpio y recto. Cuando se chocan ligeramente dos tubos suspendidos, después de haber estado cuatro ó cinco dias sumergidos en el agua sin reblandecerse, debe oirse un sonido claro y argentino, que denotará una cocción completa y la ausencia de grietas y de poros grandes y numerosos, en los que se deposita el agua para destruirlos lenta, pero seguramente. Generalmente los tubos se fabrican de tierras margosas conteniendo carbonato de cal. Si la calcarea está en granos muy grandes y al preparar las tierras y pasarlas por la criba no se han quitado, durante la cocción, se reducen á cal cáustica, dejando un vacío que más tarde se llena de agua, la que hidratando la cal, la aumenta de volumen y produce la ruptura del tubo. Las piritas que existan en las tierras empleadas se sulfatarán y producirán el mismo efecto que la cal." (Deveaux).

Respecto al diámetro de los tubos, el mismo autor nos dice que se determina por la fórmula empírica,

$$d=0,004\frac{u}{i}.........1,$$

en la cual u es la velocidad de escurrimiento del agua, é i la pendiente por metro.

7. *Drenes primarios, colectores, y canal de desagüe.*—Como se comprende, á medida que un dren sea más largo, más agua recojerá, pues dicho quedó que la fórmula 1 se refiere á un metro de longitud. Además, podrían colocarse tubos de igual diámetro en todo el drenaje; pero fácil es admitir que será más económico darles una sección proporcionada solamente á la cantidad de agua que recojan; esto es, mayor diámetro miéntras más avanza el drenaje. De aquí resulta que para facilitar el trabajo, primero se colocan tubos de 0,m· 03 de diámetro, llamados primarios; estos desembocan en otros de mayor sección, llamados colectores; y en fin, estos en otros llamados canales de desagüe, pues siendo ya necesaria una sección mayor, se suprimen los tubos y se remplazan por un canal abierto. Por lo demás, los colectores pueden ser de primero, segundo y aun tercer orden, según la extensión del drenaje. Ocupémonos de cada uno de estos tubos.

I. *Drenes primarios.*—Se adoptan generalmente, según se ha dicho, de 0,m· 03 de diámetro, y para el dren que formen, 250 metros; llamándose dren á una sucesión de tubos de igual diámetro, por ejemplo, en la lámina XI, $a\ a'$; $b\ b'$; $C_{,}\ a_{,}$; $b_{,}'\ n$ $c'\ C'$; etc., son otros tantos drenes.

II. *Drenes colectores.*—Se ha dicho que los drenes primarios desembocan en otros de mayor diámetro llamados colectores. Falta sólo calcular el diámetro de estos drenes, ó sea, de sus tubos.

Para ello, puesto que deben recibir el agua de los primarios que en ellos desembocan, suponiendo que el volumen de agua sea proporcional á las secciones, lo cual siempre bastará pues que será realmente menor, si es n el número de drenes

primarios que concurren á un colector; para calcular la sección de éste se tendrá la ecuación, llamando r el radio de los drenes primarios y r' el del colector,

$$r'^2 = n\, r^2;$$

por lo cual,

$$r' = r \sqrt{n} \ldots\ldots\ldots 2.$$

Se admitirá que igual fórmula puede aplicarse sea cual fuere el orden de un colector, pues respecto de él los anteriores pueden considerarse como primarios.

Debe ahora observarse que en lo anterior se ha supuesto igual pendiente para todos los drenes; pero esto será muy raro, y entonces, como á mayor pendiente más fácil será el desagüe y bastará menor radio, como lo indica la fórmula 1, el radio r' dado por la fórmula 2, vendrá á ser en función de otra pendiente i',

$$r'' = r' \frac{i}{i'} = r \frac{i}{i'} \sqrt{n} = \frac{0{,}002\, u\, i \sqrt{n}}{i'} \ldots\ldots\ldots 3;$$

en cuya fórmula, i será la pendiente para los drenes primarios, concurrentes á cada colector; i' la pendiente de éste; $u_{,}$ el gasto de un dren primario; n el número de éstos; é i' la inclinación del colector.

III. *Canal de desagüe.*—Éste será un canal cuya sección sea, por económica, trapezoidal; y se puede calcular por la fórmula,

$$Q = 50\, L\, h \sqrt{h\, i};$$

en la cual Q es el gasto, fácil de calcular por el desarrollo total del drenaje; L, su latitud; h, su altura, é i, su pendiente.

Suponiendo $L = 2\, h$, y despejando á h, resulta,

$$h = \sqrt[5]{\frac{Q^2}{10000\, i}} \ldots\ldots\ldots 4,$$

fórmula más práctica, pues la anterior puede inducirnos á una sección defectuosa, puesto que es muy difícil preveer las dos magnitudes h y L que la den aceptable.

Respecto á la fórmula 4, supone una sección rectangular, pero prácticamente bastará para el servicio tomar para las bases del trapecio que recomendamos $L \pm 0,^{m} 2\,L$; siendo $L=2h$.

Por lo demás, fácil es ver que el valor de L dado por la fórmula, dará las bases del trapecio:

Inferior..................$L\ (1-0,2)=0,8\ L$;
y Superior.................$L\ (1+0,2)=1,2\ L$.

Finalmente, siempre será necesario revestir las paredes de los canales con mampostería, ó cuando menos, si no se trata de obras grandes, con cesped, pues el exceso de gasto les dará mayor duración, que compenzará y con mucho el costo.

En la figura 76, lámina XII, se ve la sección de un canal de desagüe.

8. *Distribución de los drenes.*—Si en las experiencias preliminares resultó que es d, por ejemplo, la distancia á que el dren elegido extiende su acción, es evidente que la distribución de los drenes debe ser tal que en su mayor separación, contada sobre una perpendicular común á dos de ellos, jamás se tenga $s > 2\,d$, siendo s esa separación referida.

9. *Obstrucciones en el Drenaje.*—Estas y su modo de combatirlas, son los siguientes:

I. *Penetración á los tubos de raíces ávidas de agua.*—Al hacer las cunetas se debe notar en qué partes existen esas raíces, y entonces, en ese trayecto se rodean los tubos de cascajo ó faginas. De este modo, sólo habrá allí el agua correspondiente á la extensión del trayecto, y siendo poca, se depositará en el fondo de la cuneta que allí se hace más profunda, con lo cual los tubos quedarán en seco y las raíces no les alcanzarán. Para mayor seguridad se deben cubrir las junturas con cemento ó mastic al cruzar los lugares peligrosos; pues en último caso es preferible que en esos tramos el terreno quede mojado, y no que se obstruya el drenaje.

rreno para que puedan reunirse á su colector bajo un ángulo agudo. Esta conección, reunirse bajo un ángulo agudo, es, como la figura lo demuestra, una condición esencial en el drenaje, pues así se evitan los choques de las corrientes que pueden degradar los tubos. Así, pues, cuando estos ángulos no resulten agudos naturalmente, como en *e z'*, se darán al dren las inflexiones necesarias para ello, como en *x x' C'*.

Finalmente, se observará en la figura que la ley general de los drenes primarios es ser normales á las curbas de nivel, en cuya virtud resultarán establecidas en las líneas de mayor pendiente. Sin embargo, esto no es absoluto sino en tanto que esas líneas sean menores que 250 metros, pues de lo contrario se establecen colectores en esas líneas de mayor pendiente, y derramando en ellos los drenes primarios bajo ángulos de 30 á 45°. Por lo demás, nosotros hemos supuesto un terreno demasiado ondulado en la figura citada, para que siendo el caso más difícil y comprendida la teoría en él, fácilmente se aplique en cualquiera otro; pero lo general será un terreno más plano. Y más todavía, en terrenos horizontales será necesario obtener la inclinación de los drenes artificialmente, esto es, haciendo las cunetas más y más profundas hacia el desagüe.

Respecto á este desagüe, se hará naturalmente á un terreno más bajo que el drenado; ó bien, si hay un subsuelo permeable bajo un lecho impermeable y "seco", puede romperse éste para que absorba el inferior el agua. En este caso se llega al Drenaje Vertical, y puede obtenerse por la simple ruptura, por barrenos, de la capa impermeable; pero entonces hay que ir haciendo los barrenos muy poco á poco, pues sería muy posible llegar á un resultado contraproducente, esto es, resecar demasiado el terreno, ó mojarlo aun más si el subsuelo permeable trae agua.

PARTE SEGUNDA.

OBRAS COMPLEMENTARIAS DEL DRENAJE.

CAPITULO I.

MATERIA Y FABRICACIÓN DE LOS TUBOS, ACUEDUCTOS, TÚNELES.

12. *Materia y fabricación de los tubos.*—Una de las fórmulas para la materia de los tubos, es en Europa la siguiente:

Tierra marga........................	3	partes,
Arcilla verde........................	6	„
Arena................................	1	„
Total.........	10	„

Si se tratara de materias químicamente puras, esto sería suficiente; pero no existiendo ese caso y pudiendo estas tierras al contrario estar más ó menos mescladas con óxidos ó materias orgánicas, nos parece que lo más acertado y práctico es sentar: "que podrá hacer buenos tubos de drenaje quien sepa hacer buena teja." Quien se haya fijado en las cualidades que debe tener un tubo de drenaje, y á la vez conozca nuestras tejas comunes, comprenderá, y esperamos que convenga con nosotros, que la pasta que produzca una buena teja, dará un buen tubo.

13. *Fabricación de los tubos.*—En Europa hay fábricas especiales para ellos, y en nuestra capital, aunque no expresamente hechos para el objeto, pudieran conseguirse. Sin embargo, en la mayor parte de los casos tendrá que hacerlos el interesado, y así, tal vez sea útil dar una idea de las máquinas que se pueden emplear para obtener una producción pronta y económica. Propondríamos, pues, la máquina siguiente, ó algo semejante que cada uno puede proyectar.

Sobre un fuerte banco de madera sólidamente clavado en tierra, fig. 79, fíjese en su centro *a a'* un tubo de fierro *a a' b b'*, de un diámetro interior igual al exterior de los tubos por construir y de una longitud doble de la de los tubos; en su mitad *c d*, póngase un alma de madera de un diámetro igual al interior de los tubos, fijándola por un crucero metálico de gran peralte pero pequeño grueso, para que no divida mucho á la masa y engendre huecos en los tubos; póngase la hembra *M* de un gran tornillo, unida al banco por los fuertes brazos *m n m' n'*, bien firmes en el banco; pásese por la hembra el tornillo *t t'*, llevando en su extremo inferior un pequeño cilidro *t*, para comprimir la masa; y en fin, dense á la máquina las palancas *l l' l'' l'''*, para efectuar la rotación del tornillo y comprimir la masa obligándola á descender.

Descrita esta sencilla máquina, fácil es ver cómo funcionará: lleno de masa el espacio *o o'*, se hace obrar al tornillo; la masa al descender se divide por el crucero *c d*, pero pasándolo, vuelve á reunirse y soldarse por el efecto de la presión, llenando el espacio tubular *i c g h*, para formar el tubo; al llegar á *b b'* se corta de tal modo que el extremo del tubo quede bien definido; se sigue sacando el tubo; y en fin, al tener la longitud necesaria se corta y se separa, continuando de igual modo hasta cconcluir los tubos que se quieran.

Hechos los tubos, es necesario que se sequen sin deformarse, y para ello, lo mejor y más económico será ponerlos en unas perchas horizontales *c c'*, fig. 80, á la que se dará vuelta periódicamente para que la gravedad no altere desigualmente los diámetros de los tubos. Por lo demás, serán varias per-

chas y á la sombra; lo primero para dar abasto á la máquina, y lo último para que los tubos se sequen lentamente.

Respecto á la cocción de los tubos, será igual á la de la teja.

14. *Acueductos.*—Suele suceder que los movimientos del suelo exijan un gran desarrollo para un canal de desagüe, y en tal caso, es más cómodo salvar algún hundimiento por un acueducto, ó una eminencia por un tunel, tal como sucede en el desagüe del Vallee de México; entonces hay veces que se necesitan verdaderas obras maestras que ni son de un tratado tan elemental como este, ni, en general, necesarias en un drenaje común.

Sólo daremos, pues, una idea de los casos más generales y sencillos que puedan presentarse y resolverse fácilmente.

Supongamos que se trata de salvar el thalweg *A B*, fig. 81.

Calculada la sección del volumen de agua que el drenaje recoja antes de llegar al acueducto, en virtud de la longitud *A B* de éste, se conocerá el volumen y por lo tanto el peso del prisma de agua *A B*, y cuyo peso será, con la exactitud suficiente, de tantas toneladas métricas como metros cúbicos tenga el prisma *A B*.

Ahora, llamando P al peso del agua; R, á la resistencia á la presión en kilógramos de la madera empleada; S, la superficie de las secciones de las vigas de que se pueda disponer; y n, á su número necesario para resistir al peso P, tendremos,

$$n=\frac{P}{R\,s}\,\ldots\ldots\ldots 6.$$

Como vemos, P y s pueden siempre conocerse, y respecto á R cambiará según las clases de las maderas, su beneficio y la sección, teniéndose:

$$R=c\frac{b^4}{h^2}, \text{ para la sección cuadrada;}$$

$$R=c\frac{a\,b^3}{h^2}, \text{ para la sección rectangular;}$$

y

$$R = c\frac{d^2}{h^2}, \text{ para la sección circular.}$$

Respecto á las literales, se tiene: b, el lado del cuadrado en centímetros; a, el lado menor en centímetros del rectángulo, siendo b el mayor; d, el diámetro en la sección circular, en centímetros; h, la altura del poste, en decímetros; y en fin, c, un coeficiente en gramos que depende de la madera, y cuyos valores, para postes cuya altura esté entre 30 y 45 veces el lado de la sección, son los siguientes:

Para la encina.....................	200
y Para el pino........................	150

Calculados los postes, es necesario después calcular las dimensiones de las canales, de poste á poste. Suponiendo el caso más general, de la canal de sección rectangular, se tiene, para el grueso de las tablas,

$$(b-b') = \frac{3\,P\,L}{2\,E\,h^2} \text{.........7;}$$

en cuya fórmula, P tiene la significación del peso de agua entre poste y poste; L, en metros, su separación; h, en metros, la altura de la canal; y E, es el coeficiente de elasticidad de la madera, que para el encino es de 50 gramos, y para el pino 40 por centímetro cuadrado. Por lo demás, b' es el ancho interior de la canal. Además, la fórmula supone un tubo cerrado superiormente, y como los canales son abiertos, será necesario sustituir ese lado por cruceros formados de varillas de fierro, obrando por tracción para reunir las paredes laterales por su parte superior apoyándose sobre las zapatillas a b......, fig. 81. Bastará espaciar estas varillas á un metro y que tengan de radio 0,$^{m.}$01, aun para canales de 0,5 de ancho y de igual altura.

El mejor medio de hacer estas canales será formar con los mismos postes y largueros que los unan, el armazón exterior del acueducto, fig. 81. La figura citada da una idea bastante del caso, y sólo haremos notar que las junturas de las cabezas de las tablas siempre deben apoyar contra una colum-

na del armazón, para que no se salten. Todavía, dado el grueso de las tablas por la fórmula 7, para preever á su mala calidad, será prudente duplicarlo. Respecto á las junturas de las tablas, se harán á ensamble ó calafateadas.

Resta sólo indicar las principales precauciones que se deben tomar, y son las siguientes:

1ª Que los postes sienten bien, clavándolos lo que sea necesario, ó si se quiere una construcción más estable, se les dé una base de mampostería.

2ª Arrancar y terminar el canal desde antes y hasta después de unos dos ó tres metros de penetrar al terreno, apoyando allí sus extremos sobre estribos de mampostería.

3ª Que el agua no entre al acueducto formando ángulo con él, lo cual dependerá del trazo, pues habría una descomposición de fuerzas de las cuales una sería normal á la dirección del tunel, y acabaría por degradarlo; y

4ª Que el thalweg cruzado quede entre dos postes, pues si éstos lo obstruyen pueden sufrir en las avenidas.

15. *Túneles.*—Nada es más fácil que hacer un tunel en buen terreno, pero ni más difícil tampoco cuando éste no ayuda con su gran cohesión. En tierras flojas será, pues, necesario revestir el tunel. Cuando la sección pase de 1 metro de lado, será necesario el revestimiento de mampostería, pero si no llega á este límite, bastará con ademarlo, siendo el procedimiento más económico el seguido en las norias, fig. 82; sólo que aquí será necesario ligar los ademes por largueros en los ángulos, uniéndolos por clavos. La escuadría de los ademes de las norias será bastante; y en todos casos será oportuno calafatear las junturas. Respecto á la sección, la mínima será conveniente que sea de 0,$^{m.}$5 de base por 0,$^{m.}$8 de altura, para que pueda entrar un hombre á limpiarlos.

Finalmente, la entrada y salida de los túneles deberá defenderse con un revestimiento de mampostería, ligado al de madera como se ve en la figura 82.

Respecto á la duración de la madera en buen servicio, es de unos veinte años.

LIBRO TERCERO.

RIEGOS.

PARTE PRIMERA.

TEORÍA DE LAS IRRIGACIONES.

CAPITULO I.

DEFINICIÓN DE LA IRRIGACIÓN.—CLASIFICACIÓN DE LAS AGUAS, Y SUS EFECTOS EN LOS CULTIVOS.

1. *Definición.*—La Irrigación es el arte de dar á las tierras la humedad necesaria á cada cultivo.

Basta esta sola definición para comprender no sólo la gran importancia de la irrigación, sino también las dificultades que presenta al análisis teórico. En efecto, data desde la más remota antigüedad, y sin embargo, no hay aún fórmulas precisas para saber en cada caso y para un cultivo dado cuál es la cantidad de agua necesaria. Y no es extraño. La latitud de las tierras; su inclinación; su altura al nivel del mar, y la naturaleza de las tierras, son factores difíciles de ligar, y luego, si estos factores constantes lo son, más aún deben serlo otros dos muy variables: la dirección y fuerza de los vientos y la humedad necesaria á los cultivos, diferente para cada lugar, con la evaporación.

Aquí, como en el Drenaje, es, por lo visto, indispensable la experimentación cuando se quiere proceder con regla. Y se notará que aun no hemos dicho nada sobre las cualidades

del agua. Sin embargo, es este punto tan capital, que por él empezaremos.

2. *Clasificación de las aguas.*—Sea cual fuere la procedencia de las aguas, nosotros sólo las dividiremos en dos grandes clases: aguas potables, y aguas nocivas.

I. *Aguas potables.*—Hay tal relación entre los reinos animal y vegetal, que aunque generalmente al decir aguas potables se entienden aquellas propias para el uso del hombre, no hemos vacilado en aceptar que las que para él son buenas, serán también las mejores para la vegetación.

De una obra especial sobre las aguas potables de la capital, publicada por la Secretaría de Fomento, tomamos los siguientes párrafos:

"Las aguas potables deben ser: transparentes y diáfanas, incoloras, sin olor, frescas, de sabor agradable y ligero, aereadas ó con aire oxigenado, y hasta donde sea posible sin substancias orgánicas."

"El agua debe contener substancias minerales y gases oxigenados necesarios para la vegetación; el bicarbonato de cal y de magnesia, el cloruro de sodio, el oxígeno y el ácido carbónico, pero en proporcionales tales, que no exageren por este motivo su sabor, y que se presten para el cocimiento perfecto de los alimentos."

Refiriéndose á los manantiales al Poniente y Sur de la capital y los seres vivos que alimentan, continúa.

"Cuando los seres vivos faltan en las aguas, pueden considerarse muertos."

"Los peces señalan la uniformidad de temperatura y la pureza de los gases disueltos; los moluscos, la renovación frecuente de esas aguas y la presencia de las sales de cal con que fabrican sus pequeños caracoles; las plantas acuáticas, la transparencia de las aguas que permite á la luz llegar hasta donde extienden su follaje en el interior de los manantiales."

"Los peces, los moluscos y las plantas de cierta gerarquía, son los termómetros de la vida de esas aguas, y nos enseñan

más que los reactivos de la química y el exámen más cuidadoso de sus fenómenos físicos."

De la misma obra pudiéramos tomar el análisis químico del agua, pero no es ya de nuestra asignatura.

Por lo demás, toda corriente en cuyas márgenes se vea una *yerba* espesa, verde y fresca, puede considerarse como de agua potable.

II. *Aguas nocivas.*—Lo son las aguas muy ácidas; en cuyo caso suelen estar las que provienen de un drenaje, pues se cargan con mucho ácido nítrico; las que atraviezan bosques, sobre todo de encinos, que se cargan de ácido tónico; y en fin, las que salen de las turberas, ó aguas minerales. Son malas también las aguas desechadas en el labado de las minas. Las grasosas, ya sean procedentes de alguna fábrica ó bien de un manantial que las produzca. En una palabra, son malas las aguas infectas, lo que desde luego se conocen en que tienen algún olor.

3. *Acción del agua en los cultivos.*—Los efectos del agua en la vegetación son tres.

I. *Efectos fisiológicos.*—Cualquiera sabe que la mejor tierra es árida si no tiene cierta cantidad de agua. Esto es, seca no da vida á ninguna semilla; y húmeda, se la produce. Pues bien, á este fenómeno debido al agua y conocido sólo por el resultado de su presencia, es á lo que llamamos efecto fisiológico del agua; efecto que probablemente siempre ocultará su origen primordial y sus leyes, pues serían las de la vida.

II. *Efectos físicos.*—Gracias al agua y á la capilaridad, las raíces de las plantas pueden tener un contacto íntimo con las tierras, y las reacciones químicas subsecuentes pueden verificarse; y

III. *Efectos químicos.*—El agua lleva en disolución las sales necesarias para la nutrición de las plantas. Bajo este punto de vista son pues un verdadero abono. Saber para cada planta qué substancias y en qué cantidad pueden ser en tales condiciones las que disueltas en el agua dieran el mejor resulta-

do, sería resolver el más importante problema de agricultura. Teóricamente será imposible hallarlo; prácticamente, pronto empezará á conocerlo nuestra época de experimentación.

CAPITULO II.

SISTEMAS DE RIEGOS.—RIEGOS POR ESPIGAS; EN ARRIATES; POR SUMERSIÓN; POR REGUERAS DE NIVEL, Y POR FILTRACIONES.

4. *Sistemas de riegos.*—Desde luego es fácil comprender que cuando no se dispone de una cantidad de agua indefinida, será necesario saber qué cantidad de tierras pueda regarse con la que se tenga. En Europa, por término general basta un litro por un segundo en una hectara. Entre nosotros este gasto puede ser suficiente en las costas, pero en las mesas elevadas, como en el Valle de México, algunas experiencias han dado 2,5 litros para mantener las tierras á 10 grados de humedad, pues la evaporación es muy grande. Además, el poder higrométrico de las tierras es variable; lo es también la humedad necesaria á cada cultivo; ambas cosas se modifican con las condiciones meteorológicas del lugar; y en fin, estos puntos no son del presente curso. Nos limitaremos, pues, á la descripción de los diversos métodos de riego, en su parte geométrica.

I. *Riegos por espigas.*—Consiste en el derrame de las aguas sobre el terreno, bajo la condición única de mojarlo todo y no estancarse en ninguna parte. Entrando, pues, el agua por la parte más alta, condición indispensable á todo riego natural, esto es, cuyo motor sea la tendencia del agua á correr sobre el terreno, se debe ir derivando poco á poco de las partes más altas á las más bajas, por canales ó regueros cada vez más y más bifuscados hasta llegar al fondo del terreno.

Veamos un ejemplo, pues el trazo debe satisfacer á ciertas condiciones.

Supongamos, fig. 83, que se quiere regar la labor $A\ B\ C\ D$, tomando el agua del canal $A'\ B'$, y siendo $B_{/}'\ B''$ la linea de mayor pendiente del terreno.

Fácil es comprender que si se halla la perpendicular $a\ b$ á $B_{/}'\ B''$, $A\ a$ y $A\ b$, serán los límites de todo canal de derivación, pues $a\ b$ será un elemento de una curba de nivel. Suponiendo, pues, que esa curba fuera $a\ b\ b'$, sólo de allí á B podría, como máximo, hacerse llevar el agua si la desviación se efectuara en A. Siendo, según la figura, C el punto más alto del terreno, será indispensable trazar la curba de nivel $C\ C'$ hasta encontrar al canal; establecer la toma más allá de ese punto según la curba $C\ C''$; y ya el agua en C, distribuirla por regueras cada vez más bajas; $C\ A$; $e\ e'$; $b'\ d$; y cada vez menores $00'$; $i\ i'$; etc. Respecto á la longitud y separación de las espigas se determinará en cada terreno por la condición de que cuando el agua derramada en o llegue á o', se haya extendido lateralmente en o todo lo de que sea capaz. Siendo entonces e esta distancia, la separación de las espigas será $2\ e$. Por lo demás, estos datos se hallarán experimentalmente haciendo una espiga y derramando agua en o, por ejemplo, ver hasta dónde ha descendido cuando ya no se observe que la humedad se extiende lateralmente en o. De este modo se determinará la mínima cantidad de agua necesaria, y desde luego su mayor aprovechamiento.

Respecto á la ejecución del riego, fácil es comprenderla: Abierta la compuerta C'', poco á poco para evitar los choques, y lleno el canal de derivación $C\ C''$, se abre la compuerta del canal $C\ A$; regado el cuadrilátero $C\ A\ e\ e'$, se cierra la compuerta de $C\ A$ y se abre en C la de $C\ e$, y en e la de e', con lo que se regará $e\ e'\ b'\ d$; y así prosiguiendo hasta concluir.

Si hay abundancia de agua no habrá inconveniente en desperdiciar la excedente que llegue á $B\ D$; pero si es escasa, bien puede recogerse otra vez en el canal general el excedente, haciéndolo entrar á él por B, naturalmente si el terreno lo permite, ó mecánicamente en caso contrario.

Comprendido el método anterior, más fácil será compren-

do, sería resolver el más importante p... variedades de él,
Teóricamente será imposible hallarlo.
empezará á conocerlo nuestra época ... fig. 84, á unos

CAPITULO

SISTEMAS DE RIEGOS.—RIEGOS POR F...
SUMERSIÓN: POR REGUERAS DE NIV...

4. *Sistemas de riegos.*—Desde lue...
cuando no se dispone de una can...
será necesario saber qué cantidad
con la que se tenga. En Europa.
un litro por un segundo en una h...
gasto puede ser suficiente en las ...
vadas, como en el Valle de Méxi...
dado 2,5 litros para mantener la...
medad, pues la evaporación es m...
der higrométrico de las tierras e...
humedad necesaria á cada cultiv...
con las condiciones meteoroló...
puntos no son del presente cu...
la descripción de los diversos s...
geométrica.

I. *Riegos por espigas.*—Co...
sobre el terreno, bajo la c...
no estancarse en ninguna p...
la parte más alta, condició...
ral, esto es, cuyo motor se...
sobre el terreno, se debe i...
tes más altas á las más b...
más y más bifuscados ha...

Veamos un ejemplo, p...
condiciones.

... justapuestos dos á
... se supone que se
... ejemplo, *o o'; u u'*; etc.,
... thalwegs. Si pues el
... allí los regueros
... *t t'*; etc., de la figu-
... flancos de los arriates,
... también formarse otro
... dos curbas de nivel y
... bordes de tierra. Por
... pues fácil es compren-
... exactamente las curbas de
... pues, formar rectán-
... lleva el agua al tanque
... para que pase al in-

... En vez de lo anterior,
... regueras sobre las cur-
... ahora.
... agua, y á la vez entra á la
... rebose bañando el te-
... que el canal de rie-
... pendiente, ó de ma-
... tal como *b d e*, fig. 85,
... será ir regando el te-

... el terreno es muy incli-
... nivel muy juntas, y en-
... ridad, ayudada de la gra-
... fig. 85, sin necesidad de
... Tal es el riego que lleva

iegos más generalmente usados. Cual sea or, lo dirán los movimientos del terreno, necesaria á cada cultivo y aquella de que e.

olviendo á la figura 83, haremos observar ue un canal general de riegos en gran esca- mayor desarrollo posible, y bajo la condi- que empiece y concluya dentro de los terre- ie, y de tal modo que facilite en todas partes, a posible, las tomas de agua. Esto es fácil de efecto, si una corriente pasa por *c d*, fig. 86, o más bajo del terreno *a b c* que se quiere regar, alto *b*, será preciso hacer entrar el agua por ese lto *b*, y hacerle recorrer, por ejemplo, el trayecto , aprovechando hasta donde sea posible las ci- reno. Naturalmente la figura supone una gran e terreno, y así habrá que salvar algunas barran- ilio de acueductos, y aun tal vez algunas crestas . Respecto á la sección de este canal debe ser in- te proporcional á su pendiente según la fórmula da- Drenaje,

$$h=\sqrt[5]{\frac{Q^2}{10000\,i}}\ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

cto á la velocidad de la corriente en una sección da- inclinación conocida, se puede medir con un flotador to de dos esferas; una de corcho y otra de madera más pesada que el agua, unidas por un cordel de itud igual á la altura de la sección del canal.

licación de este flotador es bien sencilla. Arrojado al esfera de madera irá al fondo y la de corcho flotará, s dos causas el instrumento marchará próximamen- al y con una velocidad media de la que el agua lleva do y su superficie.

ndo, pues, el tiempo *t* que emplea en recorrer una *d*, la velocidad *v*, al segundo, será,

$$v=\frac{d}{t}\ldots\ldots\ldots 2.$$

Por lo demás, importa que la distancia sea la mayor posible para que el promedio resulte lo más exacto que se pueda; para cuyo fin, aun será conveniente hacer varios ensayos. La velocidad así obtenida bastará en todos casos para las aplicaciones.

Conocida la velocidad del agua y la sección del canal, claro es que el gasto de éste, en un segundo, será la velocidad por la sección; pero bien entendido que se trata de la sección mojada, observación tal vez inútil, si no la hiciéramos para hacer notar que la sección práctica debe ser mayor que la teórica para evitar los derrames.

Conocido el gasto necesario y la velocidad del agua en canales semejantes al que se proyecte, pues la estructura superficial de las paredes en ellos tiene gran influencia en la velocidad del agua, al menos en canales pequeños, fácil será ya calcular á Q; y bastará tomar por Q para entrar á la fórmula 1, 1, 2 Q, para calcular á h, en las diversas inclinaciones i del canal. Por lo demás, lo mejor será siempre procurar llegar á un trazo tal, que i sea constante en todo el desarrollo del canal.

Ahora, si para el canal de la experiencia anterior se tiene la fórmula,

$$Q=50\ L\ h\ \sqrt{h\ i};$$

y para otro, ó más cierto, otro trayecto,

$$Q=50\ L'\ h\ \sqrt{h\ i'};$$

puesto que el gasto Q y la altura h deben ser los mismos, resulta para la latitud, L',

$$L'=L\sqrt{\frac{i}{i'}}\ \ldots\ldots\ldots 3.$$

PARTE SEGUNDA.

OBRAS COMPLEMENTARIAS EN LAS IRRIGACIONES.

CAPITULO III.

DIVERSAS FUENTES DE AGUA; PRESAS Y NORIAS.

6. *Diversas fuentes de agua.*—Los rios, pozos artesianos, manantiales, norias y presas, son las principales fuentes de agua en la agricultura. Nada es necesario decir de los tres primeros, pues con excepción de los pozos artesianos son demasiado conocidos, y estos requieren un estudio especial; y además, lo mejor será, cuando sea cómodo, contratarlos con empresas que hacen de ellos su especialidad, y tienen los elementos y la experiencia necesarias que economizan ensayos frecuentemente costosos é inútiles.

7. *Presas.*—I. *Cálculo del volumen de agua.*—Se ha dicho que la condición esencial de un canal de irrigación es procurar el agua en el punto más alto del terreno. Pues bien, la Naturaleza provee á esta necesidad al tratarse de las presas, con depósitos artificiales de agua, colocando los valles propios al cultivo, á la embocadura de puertos en las cordilleras que basta cerrar para obtener una presa. Rara será, pues, la vez que sea imposible establecer una presa si se estudia con atención el terreno. Queda dicho con lo anterior cuál es el lugar más propio para establecer una presa. Respecto á la cantidad

de agua que pueda recoger, se obtendrá remontando en los thalwegs diversos que convergen en el puerto hasta su nacimiento, y uniendo esos nacimientos calcular el polígono que forman unidos dos á dos, multiplicando el producto por la cantidad de agua caida al año en la localidad, disminuida de la evaporación y absorción. Obtenido ese volúmen, para hallar la altura de la presa ó de su dique, se podrá emplear nuestra fórmula 70 de la Topografía,

$$V=l^2(a+b+c+\ldots\ldots), \ldots\ldots\ldots 2,$$

como sigue, por un pequeño tanteo.

Conocido el volumen, se asigna á poco más ó menos una altura á la presa y se miden á *a; b; c;* etc., de la fórmula citada, ahora 2. Si esos valores satisfácen la referida ecuación 2 con un poco de exceso, la altura será la propia, pero en caso contrario, siendo x la corrección en esa altura se tendrá,

$$V=l^2(\,(a\pm x)+(b\pm x)+(c\pm x)+\ldots\ldots),$$

de donde,

$$x=\frac{V}{n\,l^2}\mp\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n}\ldots\ldots\ldots 3,$$

debiéndose tomar naturalmente el signo — si la altura supuesta resultó muy grande, y el + en caso contrario; con cuyo resultado se tendrá la exactitud necesaria. Por lo demás, obvio es admitir que por la misma fórmula y de un modo semejante, puede asignarse un volumen, y entonces deducir la altura necesaria para recogerlo.

Para la valuación de estima del volumen de una presa, recordamos la ley sentada en el párrafo 18 de la Topografía, sobre la elección de una unidad de medida. En tal virtud, en lugar del metro cúbico, cada uno forme en su mente un cubo de 5 ó 10 metros de lado y piense en cuantas veces se hallará contenido en el espacio que ocupará el agua en la presa. Para que el alumno vea tangiblemente lo universal y útil de la ley referida, valúe, primero al tanteo, por vía de

práctica, el volumen de varias piezas de habitación, ya en metros, ya en decímetros cúbicos, y haciendo después medidas y calculando, verá cómo se equivoca más en el segundo caso; y llegará en general á un error tanto más grosero cuanto menor sea la unidad elegida.

II. *Espesor del dique.*—Recordando el principio de Pascal: "La presión de un líquido es igual en todos sentidos á una profundidad dada, y proporcional á ésta," es fuerza admitir que en a, fig. 87, se tiene para el equilibrio entre el empuje del fluido y el peso del triángulo $a\ e\ c$, siendo: h, profundidad del líquido; h', altura del triángulo; δ, densidad del líquido; δ', densidad de la materia del dique; y en fin, e, la base $a\ c$ del triángulo,

$$h\,\delta = \frac{h'\,\delta'\,e}{2},$$

de donde,

$$e = \frac{2\,h\,\delta}{h'\,\delta'} \ldots\ldots\ldots 4.$$

Suponiendo ahora, $h = h'$, resulta,

$$e = 2\frac{\delta}{\delta'} \ldots\ldots\ldots 5;$$

fórmula en la cual la unidad es la profundidad del líquido, puesto que e es proporcional á ella, con relación á la cual se toma.

Se ve según esto, que sin mortero, la fórmula 5 da la base para el equilibrio, y que en consecuencia, si hay mortero, la cohesión de éste bastará como coeficiente de seguridad. Para un dique de simple tierra, pero bien apizonada, será, pues, suficiente con tomar,

$$e = 4\frac{\delta}{\delta'} \ldots\ldots\ldots 6;$$

puesto que se tendrá una resistencia doble de la necesaria al equilibrio.

Además, nótese que este espesor varía con la altura del dique en toda su longitud. Por ejemplo, supongamos: $\delta = 1$,

densidad del agua; y $\delta'=2,8$, densidad del granito, suponiendo de él el dique. Se tendrá, $e=0,71\ z$, llamando z una altura cualquiera en el dique. Así, pues, si es A el perfil del dique, fig. 88, su cimiento será B, teniéndose: $a'\ b'=0,71\ a\ b$; $c'\ d'=0,71\ c\ d$; etc.

Lo anterior ha supuesto la falta de cimientos, que reducirían el espesor. Sin embargo, mejor será no contar con ellos, para que aun en caso de grandes avenidas con corrientes rápidas, se esté seguro de que el agua antes salvará la presa que volcarla.

Parece que esta teoría se opone á la mecánica de una resultante del empuje del agua contra el muro, pero nótese que esa resultante sólo tendría razón de ser cuando se quisiera contravalancear el empuje referido con una fuerza única obrando contra la superficie vertical del muro, y supuesta esa superficie inflexible, rígida y resistente. Por lo demás, vease que hemos hecho extensivo el principio de Pascal para los sólidos; y en efecto, nótese que si nos imaginamos una columna, cuanta mayor altura le demos, mayor presión soportará su base, y más difícil será en consecuencia derribarla por un esfuerzo horizontal aplicado en esa base.

III. *Precauciones de construcción.*—Siendo una presa una construcción costosa, y de graves consecuencias su ruptura, es necesario tomar las precauciones siguientes:

1ª No hacer su vértice e, fig. 89, agudo; pues fácilmente se degradaría. Será por lo tanto mejor darle á la presa un metro de más altura que al agua, y cortar el vértice hasta que se tenga, fig. 89, $e\ e'=1$ metro, lo menos.

2ª Los muros verticales fácilmente se degradan cuando en f, fig. 89, el agua lava el asiento; para evitarlo, es mejor hacer el muro interior también en talud, y éste bajo un ángulo mayor que el del reposo de las tierras, para cuyo ángulo se tiene,

Tierra compacta......................	45°;
,, ordinaria......................	37 ;
,, ligera..........................	30 ;
Arena..................................	18 ;

siendo estos ángulos los que haga el talud con la horizontal. Además, la clasificación de tierras compactas ordinarias y ligeras no se refiere á que estén más ó menos apizonadas, sino á su naturaleza.

3ª Se logrará la mejor conservación de los diques de tierra resistiéndolos, sobre todo los taludes interiores, de mampostería, ó cuando ménos con cesped.

4ª En toda presa se deberá hacer la compuerta con sus flancos de mampostería. Dos carriles verticales con viguetas horizontales, será lo más sencillo, durable y fácil de manejar. A medida que el agua baje se irán quitando traversos. Sin embargo, bien puede hacerse uso de cualquier otro sistema, fig. 89.

5ª Cuando se quieran dar cimientos al dique, es necesario sondear antes el terreno para ver si hay un subsuelo permeable y á qué profundidad está, para no alcanzarlo; pues de llegar á él se harían filtraciones que vaciarían la presa y derribarían al dique, ocasionando pérdidas considerables, si no desgracias irreparables. Si ese subsuelo *e e'*, fig. 90, está muy próximo á la superficie del terreno, mejor será buscar la mayor estabilidad del dique por su espesor. Por último, si hay un subsuelo que pueda ceder bajo el peso del dique haciéndolo muy grueso, no habrá más remedio que subdividir la presa total en varias parciales escalonando varios diques paralelos; y

6ª Los diques expuestos al oleage del mar no deben construirse con las fórmulas 5 ó 6, pues ellas suponen el agua en reposo.

8. *Norias.*—Bastante conocidas son y muchas y muy buenas máquinas hay para sacar el agua de ellas. Así, pues, este es asunto resuelto en los catálogos de maquinaria. Sin embargo, tocamos el punto, no para enseñar á los alumnos, ni mucho menos á los ingenieros, sino para hacer notar la imperiosa necesidad que entre nosotros existe de hacer una guerra en forma al antiguo sistema de cubos. Un hombre montado tira á cabeza de silla del cordel que saca al cubo; pasan-

breve descripción bastarán para comprender la teoría, y los detalles cada uno puede fijarlos. El objeto esencial de este mecanismo es eliminar las cadenas sin fin, pues la $n\,n'$ obra sólo por tracción para elevar al pistón. Aquí, pues, no hay frotamiento sino en dos partes: en las ruedas-poleas sobre sus ejes, y en el pistón y su vástago; pero estos últimos se hallarán muy disminuidos, porque el pistón $q\,r$ es muy largo para no usar estopa, sino que dándole $0,^{m.}0005$ de juego en su cuerpo de bomba, baste para la obturación esa capa de agua, y el cilindro $y\,p$ del vástago se halla en igual caso, pues también $y\,p$ es largo. Para que estas dos últimas condiciones se verifiquen, es necesario que todo el cuerpo de bomba quede sumergido. En virtud de estas razones creemos que esta máquina no absorberá sino un décimo, en resistencias nocivas, del trabajo empleado en moverla. Finalmente, la bomba será de fierro galvanizado ó latón, por razones fáciles de comprender.

Dada á conocer la bomba, calculemos su rendimiento probable.

Un caballo que pese 320 kilógramos y trabaje 8 horas con la velocidad de $0,^{m.}46$, produce 1300000 kilográmetros. Suponiendo, pues, que se pierde un décimo en las resistencias pasivas, quedarán 1170000. Es decir, este sería el número de litros de agua elevados á un metro si esa fuera su profundidad; estando pues á H metros, será,

$$V=\frac{1170000}{H}\text{.........}7.$$

Ahora bien, este volumen no puede elevarse sino elementalmente, por partes, y en virtud de la velocidad máxima aceptada 0,46. Veamos, pues, cuál debe ser la superficie del pistón para que el caballo pueda con él.

Si en $8^{h}=28800^{s}$ el trabajo es $T=1170000$, en un segundo será, $\frac{1170000}{28800}=40,6$.

Después, si es l la longitud de la pista, $\frac{l}{0,46}=t$ será el nú-



ométricamente, pero mecánicamente puede resolver- la exactitud necesaria como sigue:

supone que $a\ c$ es un paso del animal y el elemento o polígono regular que sustituya al círculo, al hacer el caballo el esfuerzo se descompone en $a\ c'$, tangente al o sustituido y cuyo efecto es útil, y en $a\ b = c\ c'$, que de á desviar al caballo, por lo que representa el esfuerzo iro.

Para calcular á $c\ c' = p$, pérdida de trabajo, podemos tomar triángulo $a\ c\ c'$, siendo $a\ c = f$, el esfuerzo del caballo y $c' = a$,

$$p = f \text{ sen. } a.$$

Después, el triángulo $b\ C'\ a$ nos da, siendo $a\ c = e$ paso del caballo ahora, lo que da la exactitud necesaria,

$$e = l \text{ sen. } a;$$

y por último, combinando estos ecuaciones,

$$l = \frac{e\,f}{p} \ldots\ldots\ldots 9.$$

Poniendo ahora $p = 0{,}2\,f$, resulta $l = 5\ e$; y tomando, para un caballo mediano, $e = 1$, queda en fin $l = 5$. Bien se ve que esta palanca es muy larga; y sería ó muy flexible si se hace delgada, por lo que maltrataría al animal, ó muy pesada si se hace gruesa, por lo que aumentaría las resistencias nocivas. Hagamos, pues, $l = 3$ y calculemos á p, que resulta, $p = 0{,}33\,f$.

Nótese ahora cómo en este camino curbo reside la fuente de una gran pérdida de fuerza, y explica por qué los motores animados sólo rinden el 60, 50 y aun 40 por ciento del trabajo útil, pues generalmente se aprovecha el movimiento circular de las bestias. En tal virtud, no sería nimio recurrir á palancas de armazón, reposando sus extremos sobre una rueda, fig. 93, para poderlas hacer más largas, ligeras y rígidas. Podrían así llevarse hasta á 6 metros y entonces resultaría, $p = 0{,}17\,f$, y admitiendo para los frotamientos $p' = 0{,}1\,f$, quedaría en total de trabajo útil $0{,}73\,f$, en vez de $0{,}57$ que daría una palanca común de 3 metros.

II. n y h. Estos factores pueden ligarse fácilmente. En efecto, bien se puede tomar siendo r el radio de la rueda menor, $h=2\,r$, fig. 91, y como siendo R el radio de la rueda grande resulta $n=\frac{R}{r}$, la fórmula 8 vendrá á ser,

$$s=0{,}088\frac{l\,r}{R\,h\,H};$$

que con $h=2\,r$, se reduce á,

$$s=0{,}044\frac{l}{R\,H};$$

y sólo habrá que determinar á R, cuyo mejor valor será el radio de la noria menos lo necesario para la rueda chica $o\,o'$, fig. 91. Aceptando, pues, la palanca propuesta, fig. 93, el valor final de s será,

$$s=\frac{0{,}264}{R\,H}.$$

Para aplicarla, llamemos ahora r al radio del pintón, y como resultará $s=\pi\,r^2$, se tendrá, para que el caballo pueda con la bomba,

$$r=\sqrt{\frac{0{,}0841}{R\,H}}\,.........10;$$

que con la ecuación 7, resolverá el problema dado, bien que aquella fórmula para motor animal, como la anterior, debe ser, con el rendimiento de 0,73,

$$V=\frac{949000}{H}\,.........11.$$

Para aplicar las fórmulas 10 y 11 supongamos: $R=1$; y $H=25$. Se tendrá: $r=0{,}^{m}058$ y $V=37960$ litros cúbicos. Respecto á la carrera del pistón sería entre o y $2\,R$, lo que fuera más cómodo construir, pues esa magnitud no influye en el resultado, porque mientras más corto sea más golpes de bomba resultarán, y recíprocamente. Sólo hay, pues, que atender á la observación antes hecha de que no sean muy rápidos porque los choques en el agua engendran grandes resistencias.

Para que se vea tangiblemente la inferioridad del sistema

de cubos en las norias, sacados á cabeza de silla, calculemos su rendimiento.

Supuesta la profundidad de 25 metros en la noria, y la velocidad del caballo de 0,^{m}46, el tiempo empleado en sacar y volver el cubo será,

$$t=\frac{50}{0,46}=108,''7\ldots\ldots\ldots 12.$$

Luego, el hombre que toma el cubo necesita cuando menos, 1 segundo para cogerlo, otro para vaciarlo y otro para volverlo á la noria, ó sea 3''; y después, el hombre montado, necesita uno para ponerse en marcha y otro para volver á ella al llegar al término del tiro. Resumen, $t=113,''8$.

En el dia de ocho horas se sacarán por lo tanto, los cubos que resulten del cociente, $\frac{8^{h}=28800}{113,8}=253,3$.

Hallado este dato, busquemos el volumen del cubo para dar al caballo igual fatiga que con la bomba.

En cada cubo recorre 50 metros con el peso del hombre, que supondremos de 60 kilógramos, más la mitad del peso p del cubo, pues vuelve de vacío. Así, pues, su trabajo en las 8 horas ó 253 viajes es,

$$Q=253,3\times 50\,(60+\tfrac{1}{2}\,p);$$

de donde,

$$p=0,00015\;Q-120\ldots\ldots\ldots 13.$$

Suponiendo ahora, $Q=1040000$, puesto que la resistencia es sólo el pequeño frotamiento de la polea, resulta $p=36$; litros que debe contener el cubo.

Con los 253 viajes se obtendrán, pues, 9119 litros. Antes de continuar será útil notar dos cosas: 1ª Se admite un rendimiento de 0,9 del trabajo total, y luego se desprecian los frotamientos. Ambas cosas son ciertas, pero en cambio el trabajo es muy continuo. Bueno es, pues, fijarse en que la continuación es un elemento benéfico á las máquinas.

No era necesario por cierto lo anterior para demostrar la inferioridad del método de cubos; pero vamos á continuar

porque esa inferioridad aún es muy superior á la que lo anterior arroja.

En efecto, suponiendo que el rédito del valor del caballo y su mantenimiento y maltrato cueste el salario q de un hombre, los costos c y c' de un litro de agua por el método de cubos y de bombas son, puesto que el primer método necesita dos hombres y un caballo, y el segundo sólo un hombre y un caballo:

Para la bomba.......................... $2q = 37960\ c$,
y „ los cubos.......................... $3q = 9119\ c'$;

ó bien, aún,

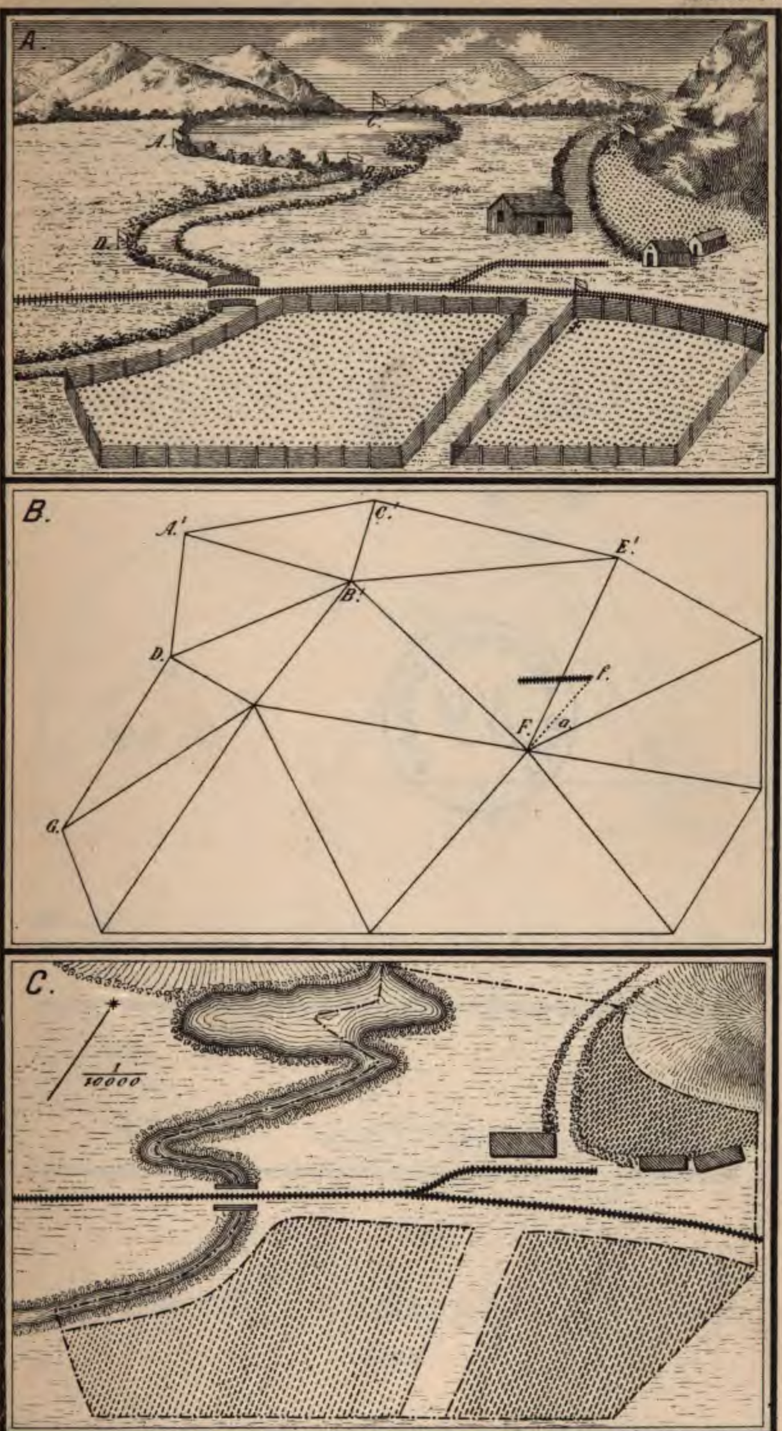
$$c' = 6{,}3\ c \ldots\ldots\ldots 14.$$

Es decir, el agua obtenida por el método de cubos es ¡seis veces! más costosa que la obtenida por bombas. Por lo demás, aquí nos hemos puesto en una profundidad media para las norias, pero aumentando esa profundidad, el desequilibrio aumenta con ella, bien que los dos rendimientos disminuyen.

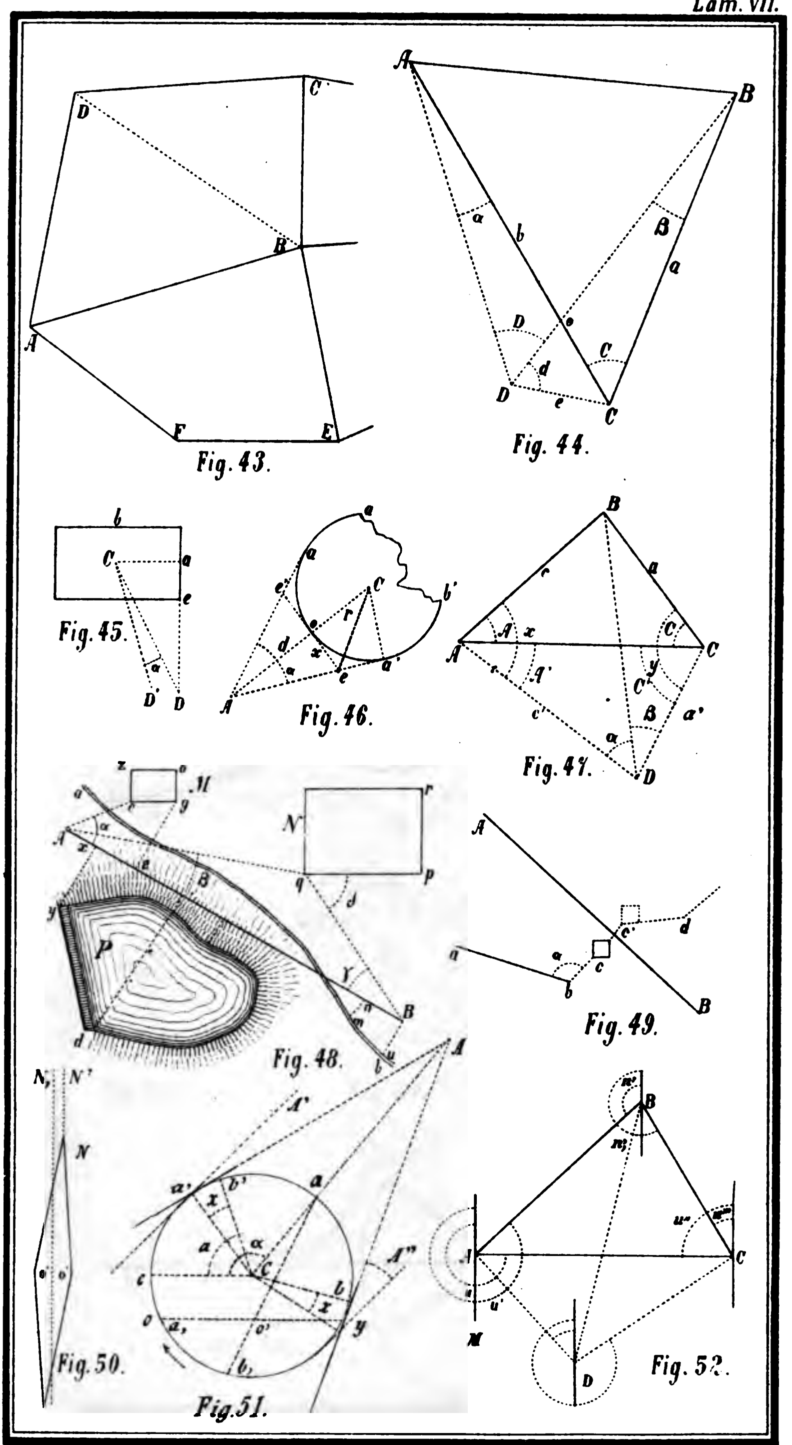
Para concluir debemos hacer notar que al paso que en el método de cubos no puede funcionar más que uno, pues ya dos se chocarían, con la bomba propuesta podrían con mucha comodidad, colocarse cuatro en una noria, y prolongándose á ambos lados la palanca, poner dos troncos, uno á cada extremo. La producción sería entonces de 151840 litros en ocho horas. Seis troncos para turnarse manejados por tres hombres darían, si la noria lo permitiera, 454720 litros. Bien se ve que con semejante volumen de agua se pueden regar muchas tierras y dar de beber á gran número de animales; y que ya necesitaría un buen servicio de tanques, que respecto á los riegos podrían hacer el efecto de presas, puesto que podría acumularse en ellos el agua de varios días. Un juego de varias bombas, cuando menos dos, tendría además la vantaja de prover á una descompostura en ellas. Una noria abundante puede, pues, ser una fortuna, en poder de un hombre inteligente.

FIN.

Lam. I.






Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.



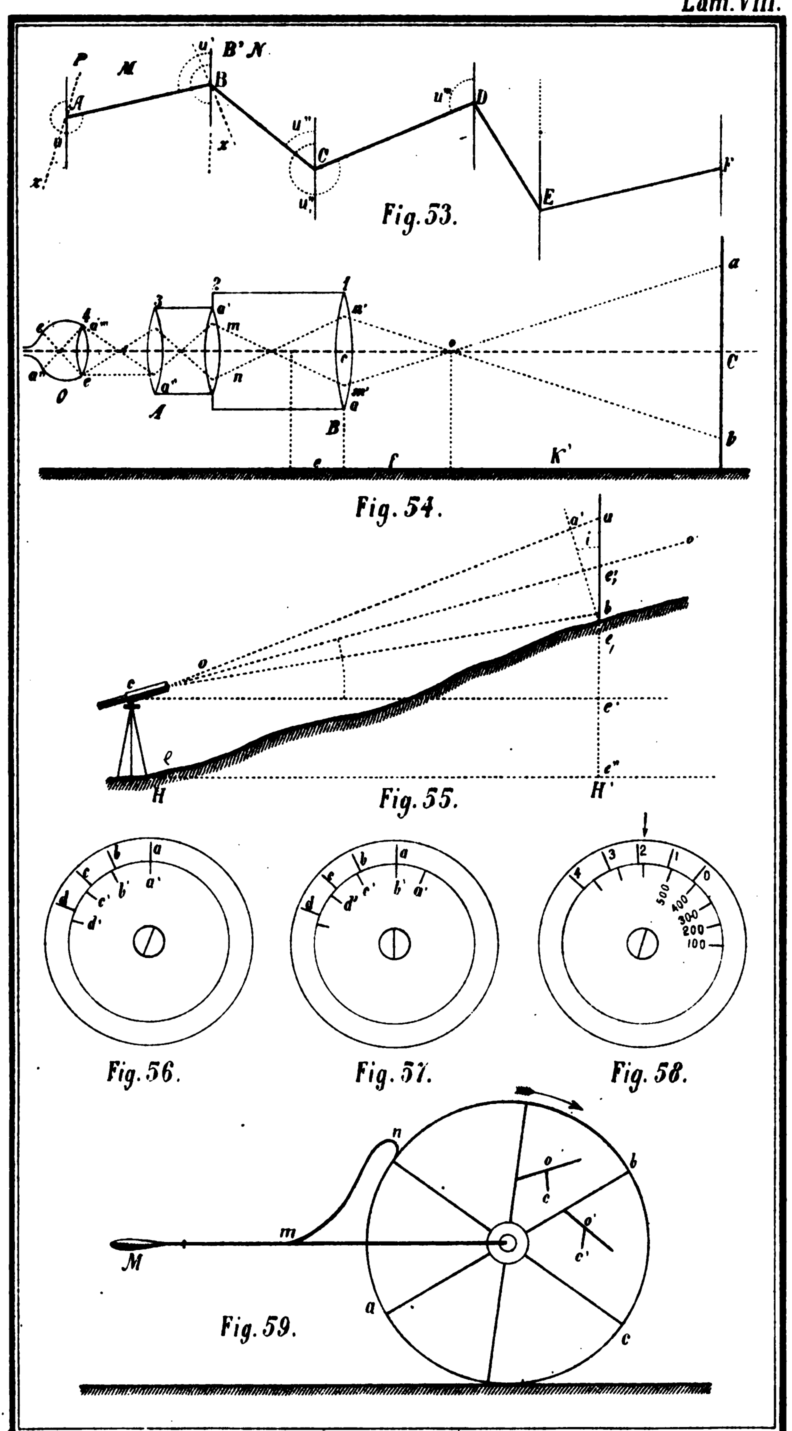


Fig. 53.

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56.

Fig. 57.

Fig. 58.

Fig. 59.



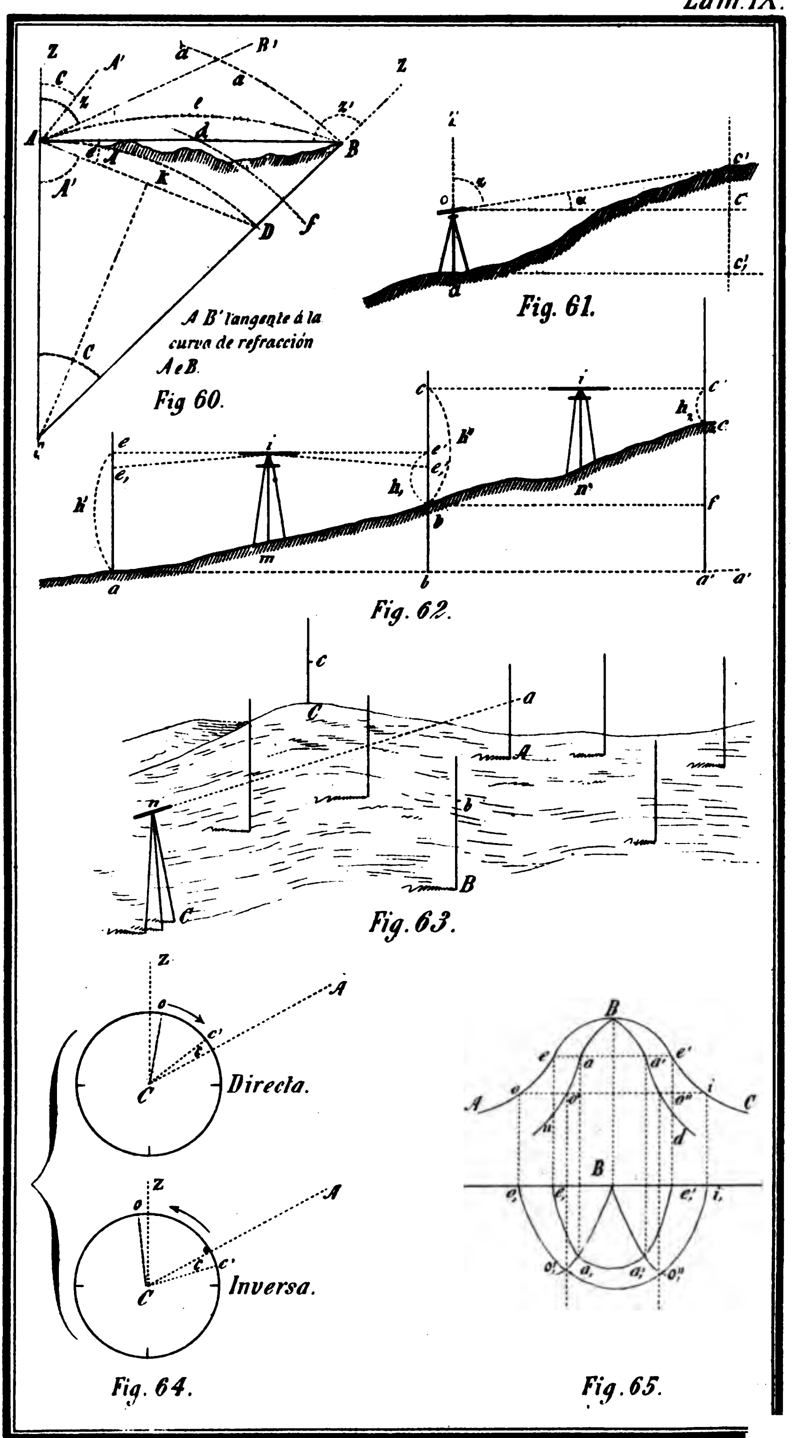


Fig 60.

Fig. 61.

Fig. 62.

Fig. 63.

Fig. 64.

Fig. 65.


THE ASTOR LIBRARY
NY

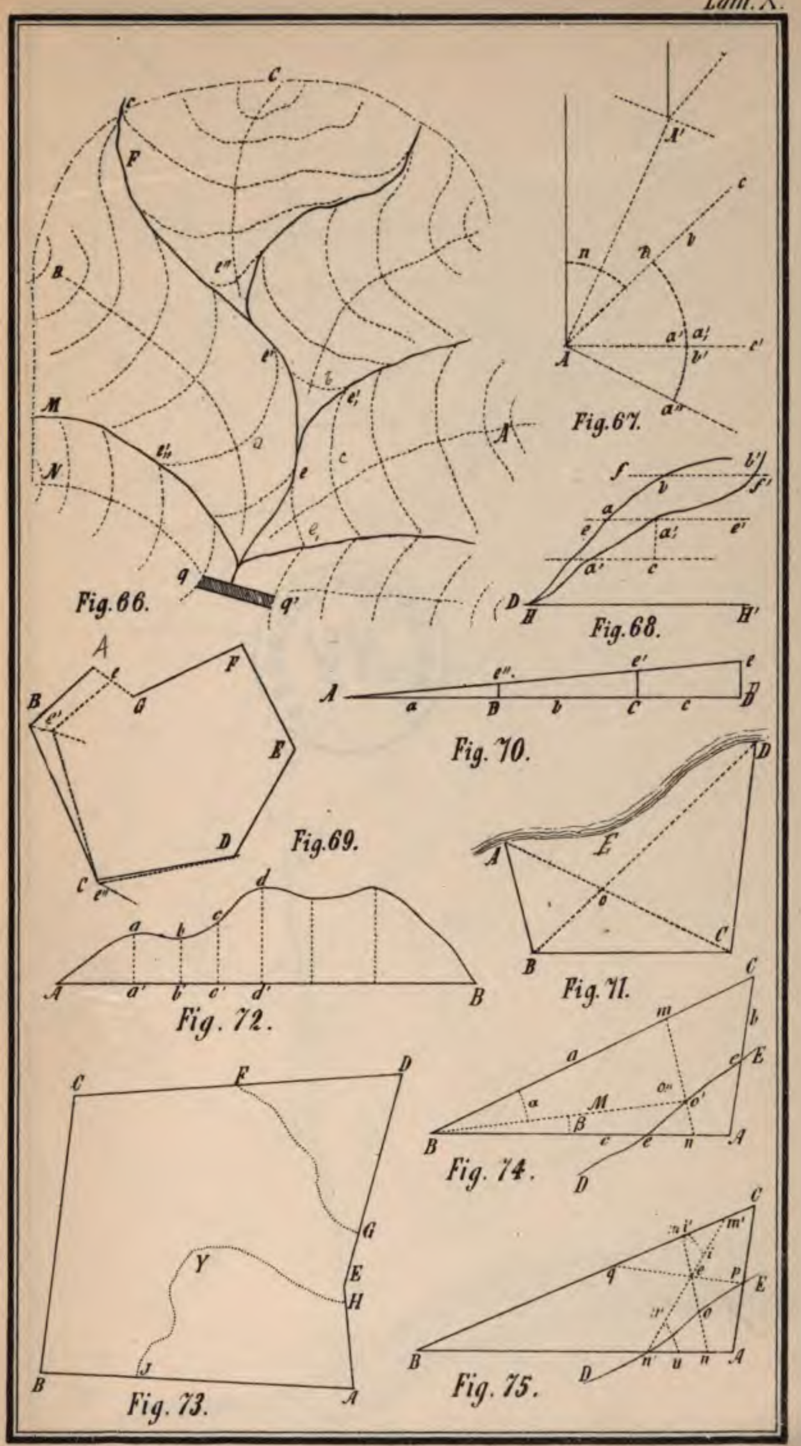
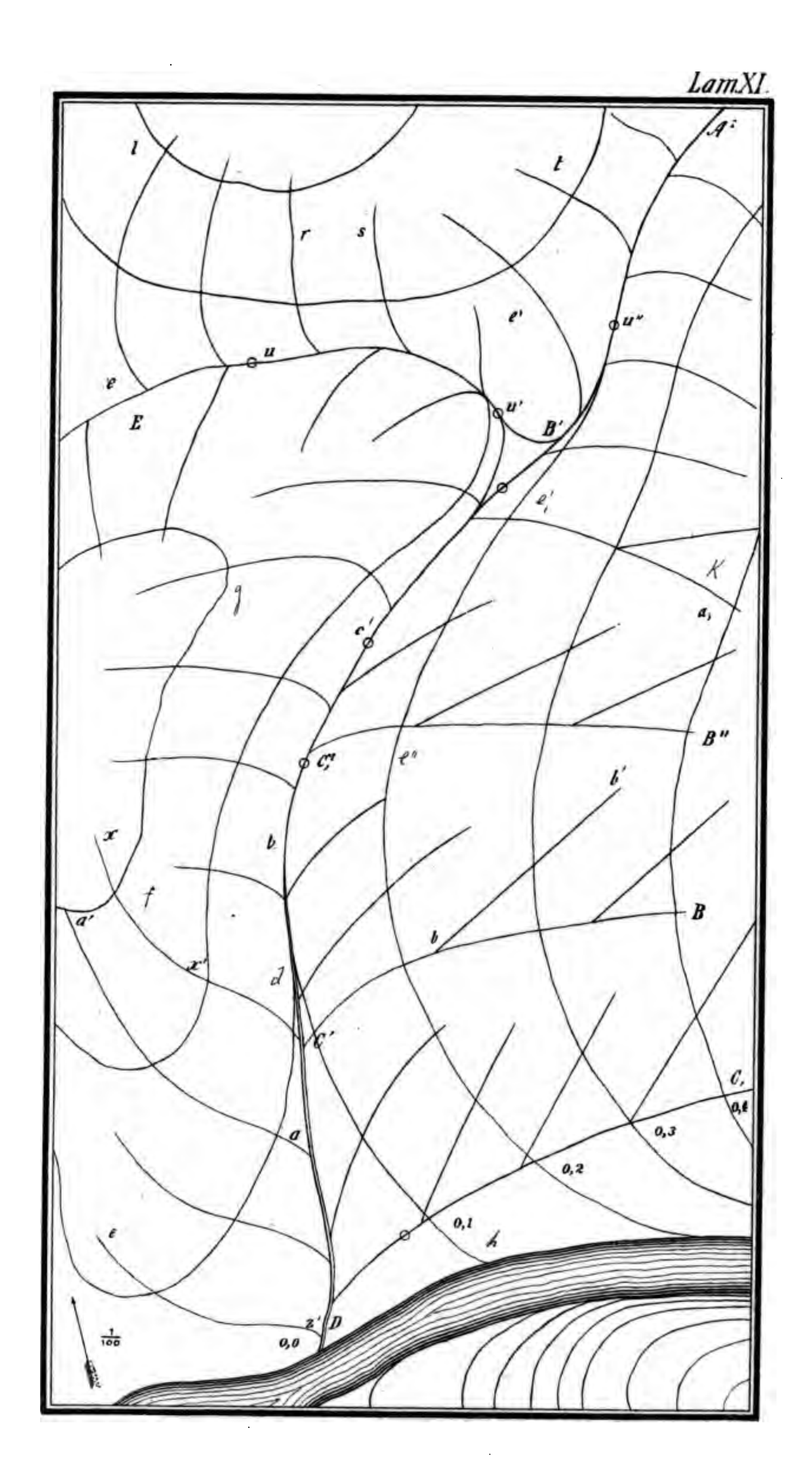


Fig. 66. Fig. 67. Fig. 68. Fig. 69. Fig. 70. Fig. 71. Fig. 72. Fig. 73. Fig. 74. Fig. 75.


THE ASTOR LIBRARY
NY



Lam XI.
A
t
l
r
s
e'
u"
u
u'
B'
e
E
e'
K
g
a,
c'
B"
C"
e"
b'
x
b
f
B
a'
b
x'
d
C'
C,
0,4
a
0,3
0,2
0,1
h
e
z'
D
0,0
1/100


THE ASTOR LIBRARY
NY

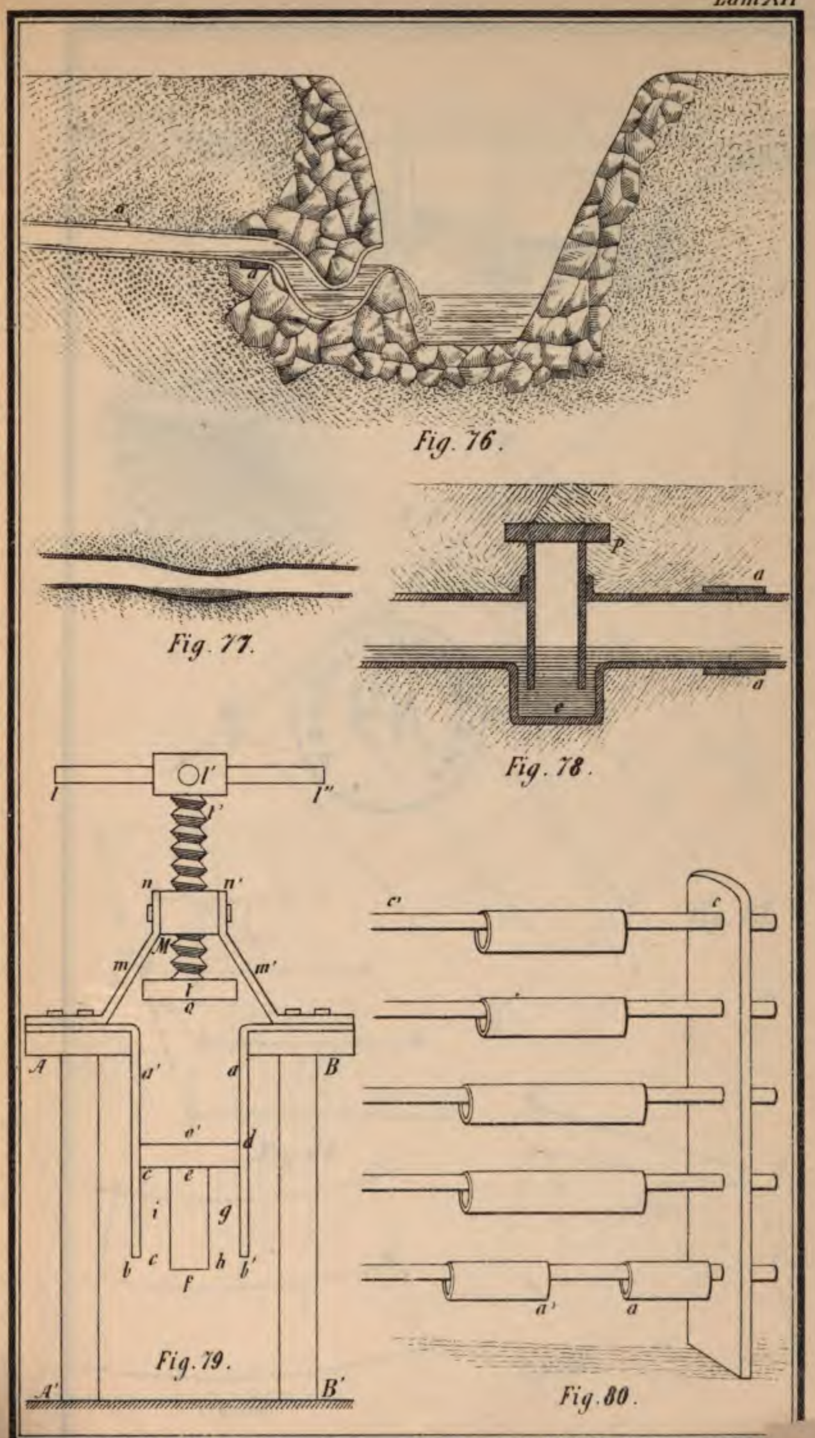


Fig. 76.

Fig. 77.

Fig. 78.

Fig. 79.

Fig. 80.



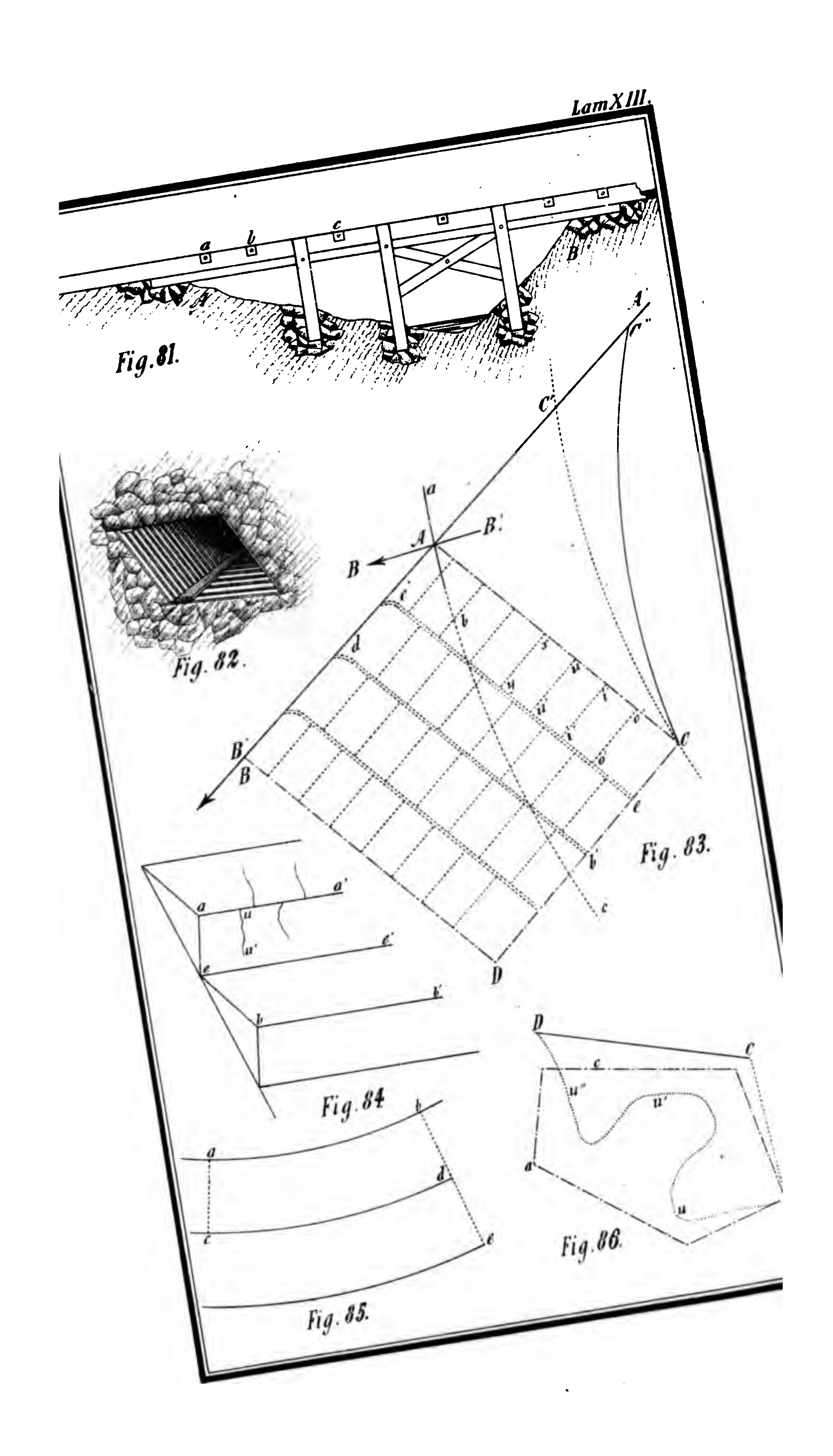


Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 84

Fig. 85.

Fig. 86.

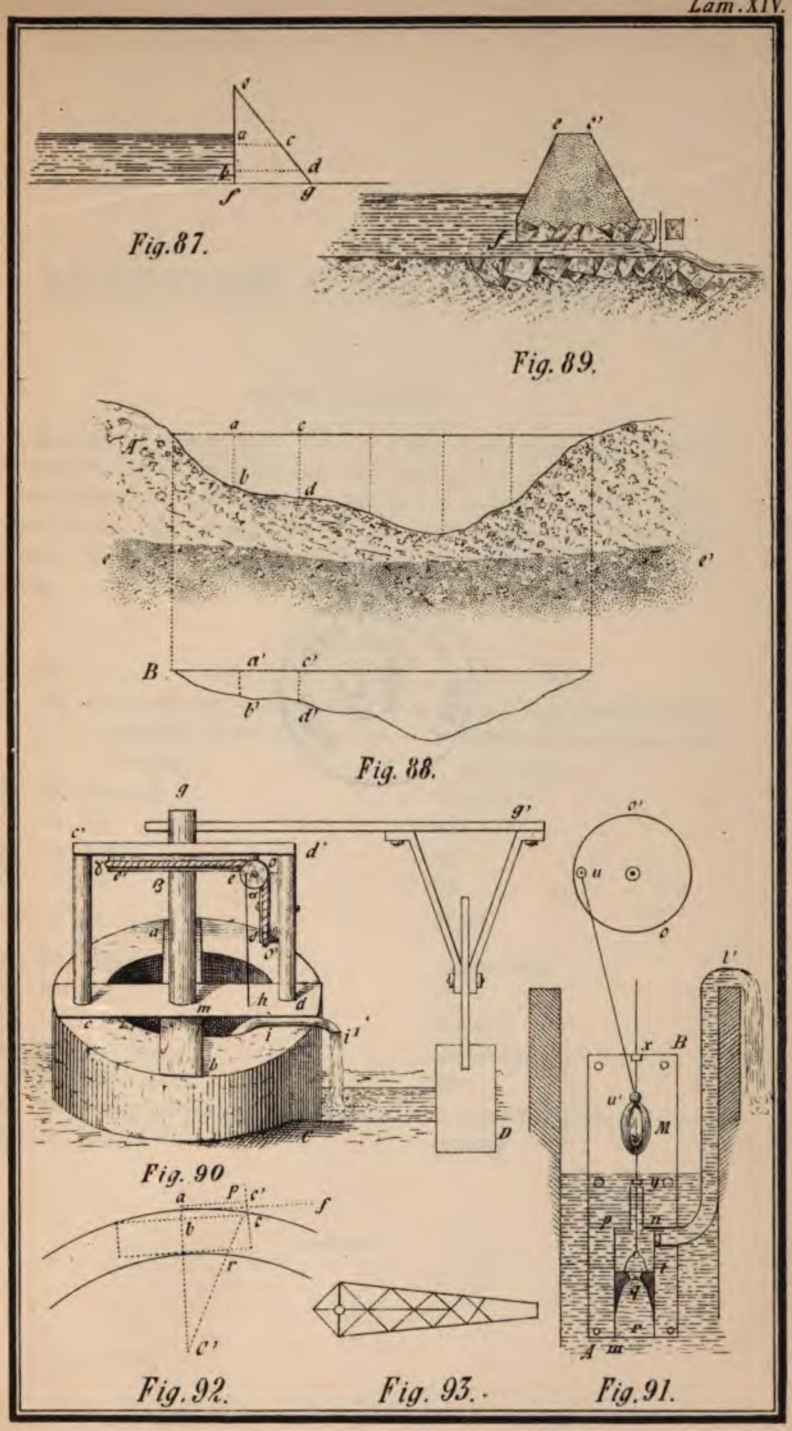


Fig. 87.

Fig. 89.

Fig. 88.

Fig. 90

Fig. 92.

Fig. 93.

Fig. 91.



RATAS NOTABLES.

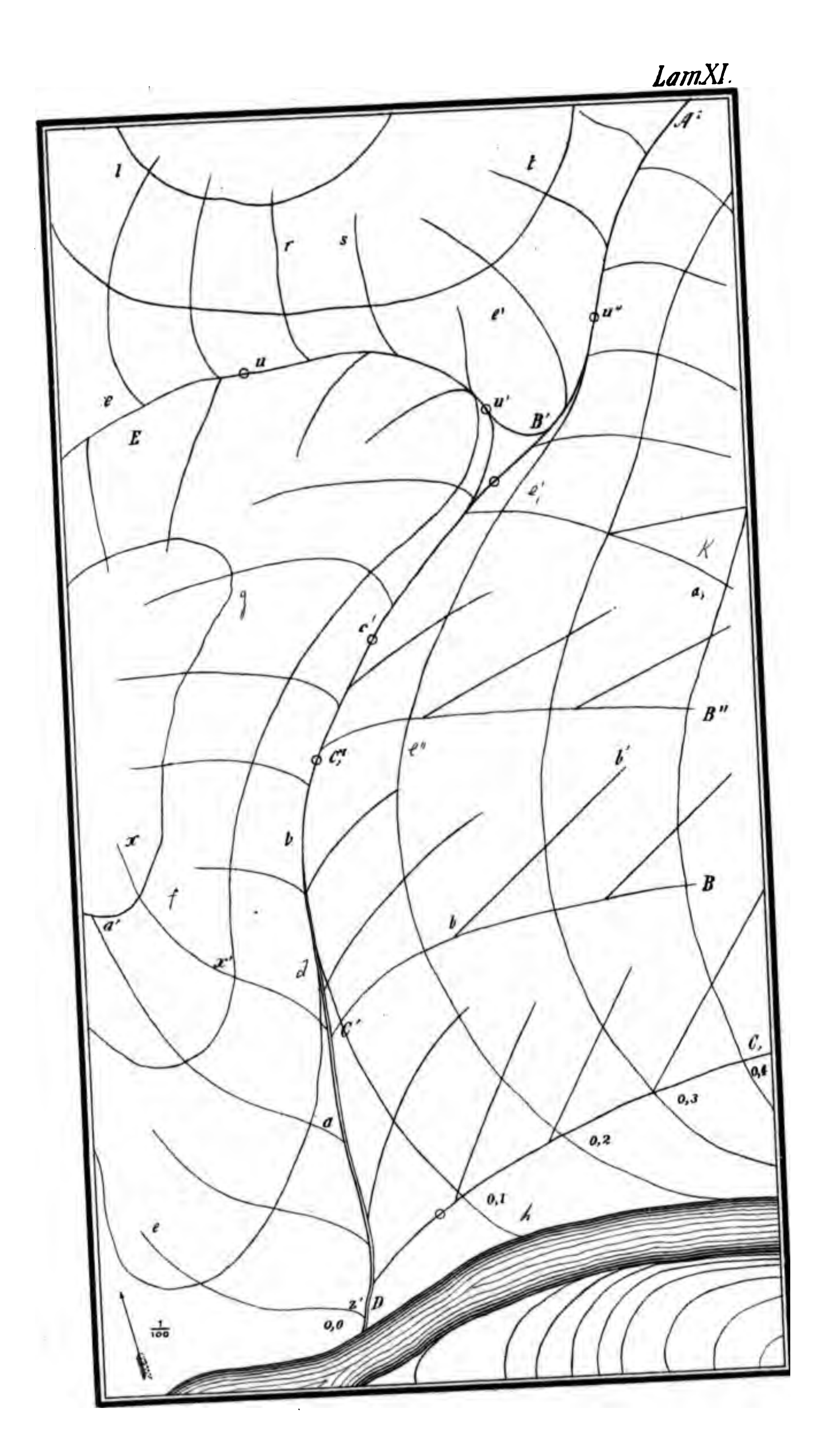
CACIÓN.

la simple vista miden varias personas
que puedan,.................."
tanteos de la última fracción de milí-
mplo, una distancia con un doble de-
quier otro medio semejante de aproxi-

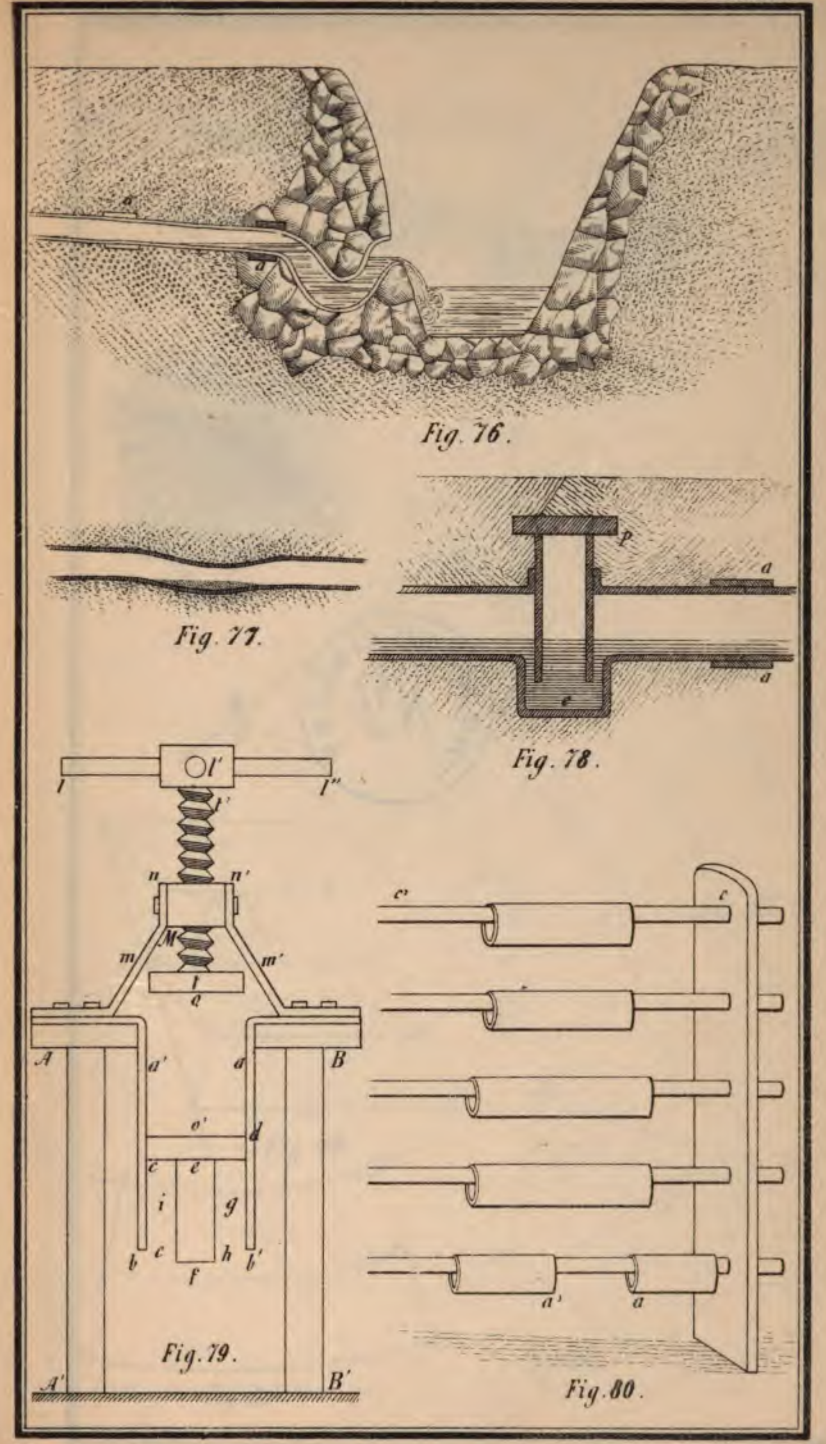
ERRATAS.

	Léase.
ñas sus di- an más pe-	que siendo muy pequeños, sus diferencias serán aun más pequeñas;.........
	algunos
	1,0
	0,1
	dz
	$\frac{y'-y}{h}$
	á igual lado
	$C_{/}$
	C ó C''
	disminuye
	82''
$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a'+b')$	$a=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a'+b')$
	exterior


THE ASTOR LIBRARY
NY


A
l
t
r
s
e'
u''
u
e
u'
B'
E
e'1
K
a1
g
c'
B''
C''1
e''
b'
x
b
B
f
a'
b
x''
d
C'
C1
0,4
0,3
0,2
0,1
h
a
e
z'
D
0,0
1/100


THE ASTOR LIBRARY
NY


a
a
Fig. 76.
Fig. 77.
P
a
a
e
Fig. 78.
l'
l
l''
n
n'
M
m
m'
q
A
B
a'
a
o'
d
e
i
g
c
h
b
b'
f
Fig. 79.
A'
B'
c'
c
a'
a
Fig. 80.

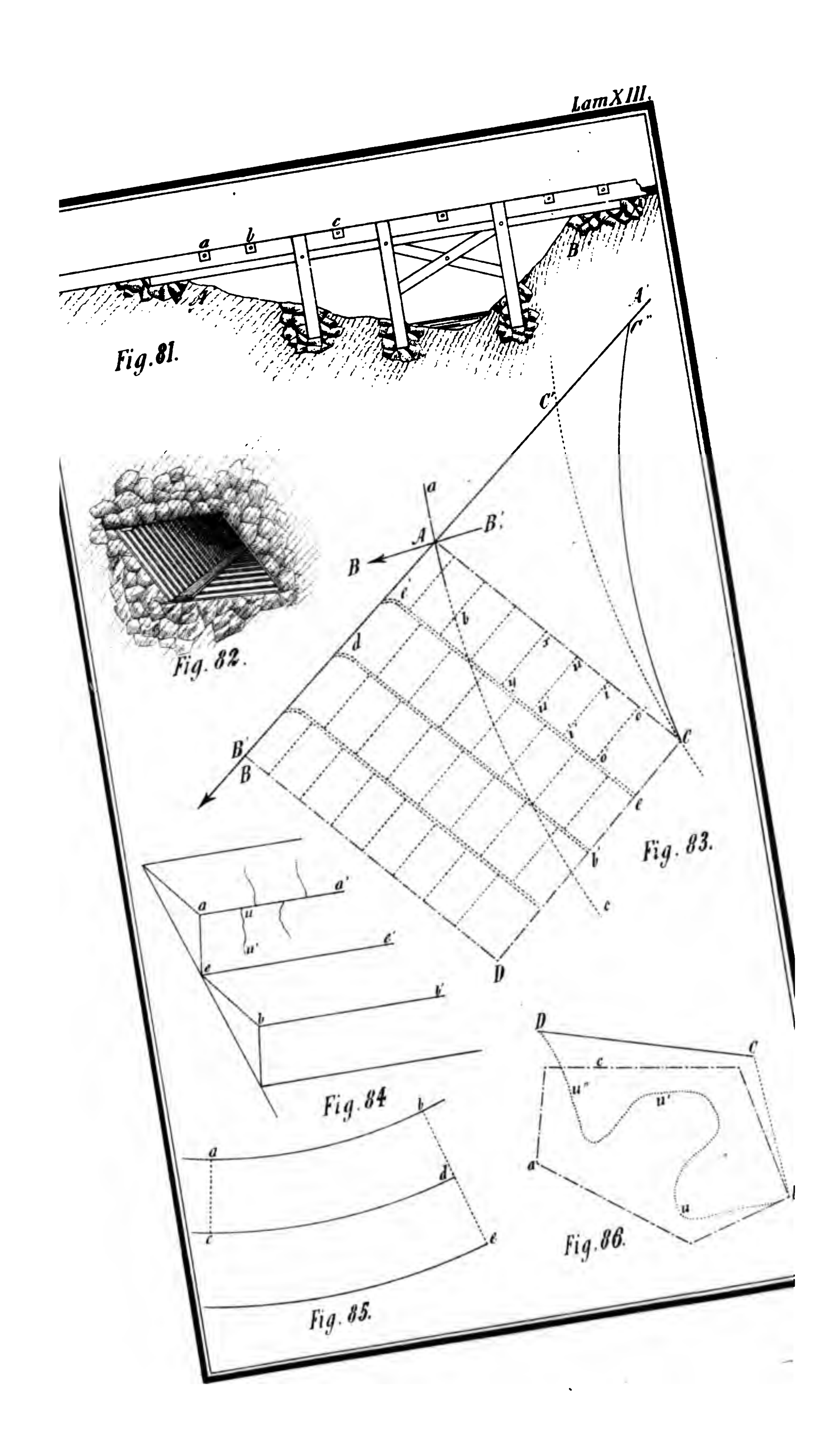


Fig. 81.

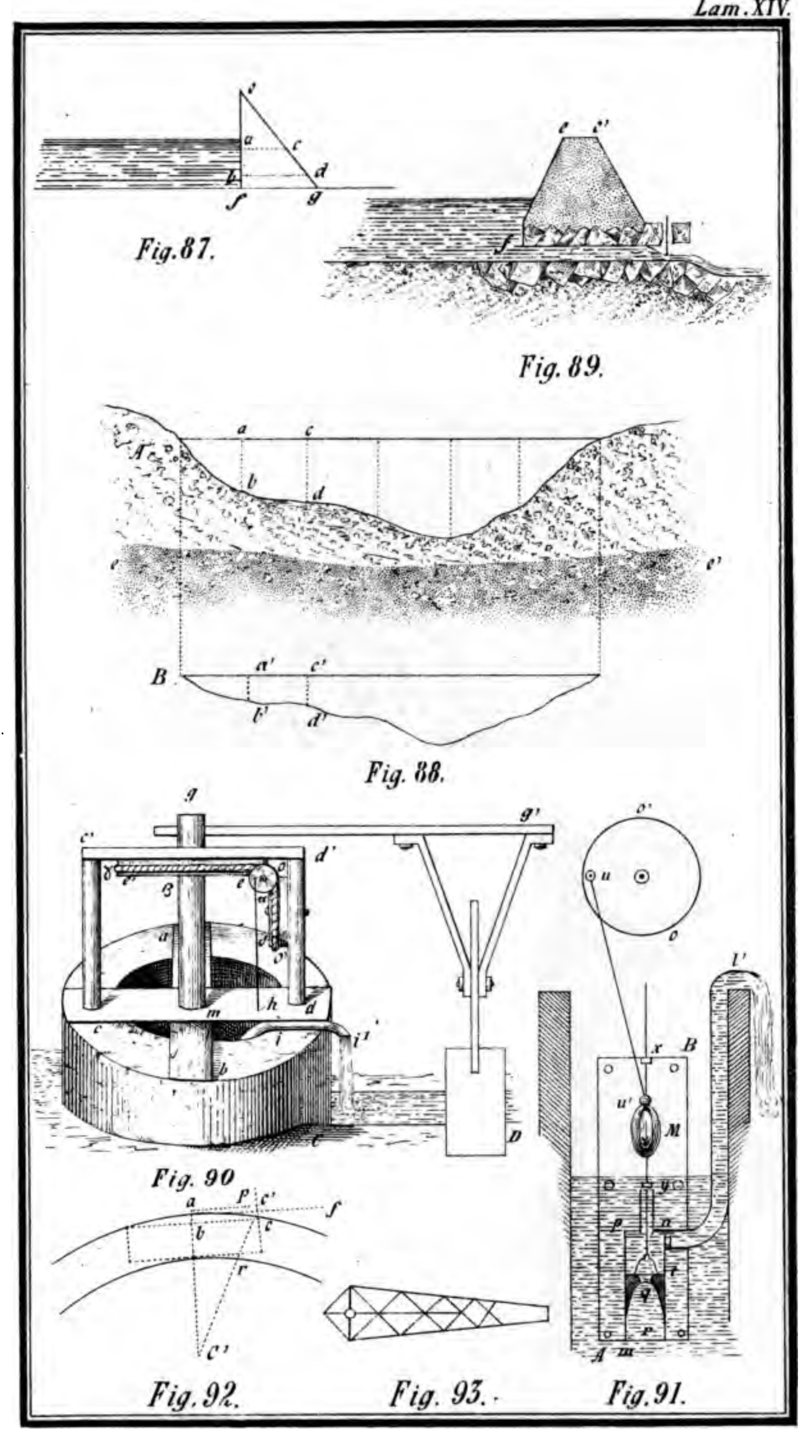
Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 84

Fig. 85.

Fig. 86.


Fig. 87.
Fig. 89.
Fig. 88.
Fig. 90
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 91.


THE ASTOR LIBRARY
NY

RECTIFICACIÓN Y ERRATAS NOTABLES.

RECTIFICACIÓN.

En la página 2, línea 6, digo: "Si á la simple vista miden varias personas una distancia con la mayor exactitud que puedan,.................."

Quise referirme á la apreciación por tanteos de la última fracción de milímetro al medir, sobre un plano por ejemplo, una distancia con un doble decímetro, y sin lente, vernier, ó cualquier otro medio semejante de aproximación.

ERRATAS.

Págs.	Líns.	Dice.	Léase.
8	10	que siendo muy pequeñas sus diferencias, serán aun más pequeñas;.........	que siendo muy pequeños, sus diferencias során aun más pequeñas;.........
8	11	algunas	algunos
9	8	16	1,0
9	4	1,6	0,1
10	8	dx	dz
17	1	$y'-y$	$\frac{y'-y}{h}$
53	24	á igual	á igual lado
57	10	C	$C_{\prime}$
57	12	C o C′	C ó C″
78	82	destruye	disminuye
107	24	72″	82″
128	24	$a=\frac{1}{2}(a'+b')\ \frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a'+b')$	$a=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a'+b')$
182	19	interior	exterior

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN GENERAL.

ESTUDIO DE LOS ERRORES.

LIBRO PRIMERO.

TOPOGRAFÍA.

Introducción á la Topografía.

Parte primera.—Triangulación.

Parte cuarta.—Agrimensura.

LIBRO SEGUNDO.

DRENAJE.

Parte primera.—Teoría del Drenaje.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Parte segunda.—Obras complementarias de las irrigaciones

LIBRO TERCERO.

RIEGOS.

еќ





